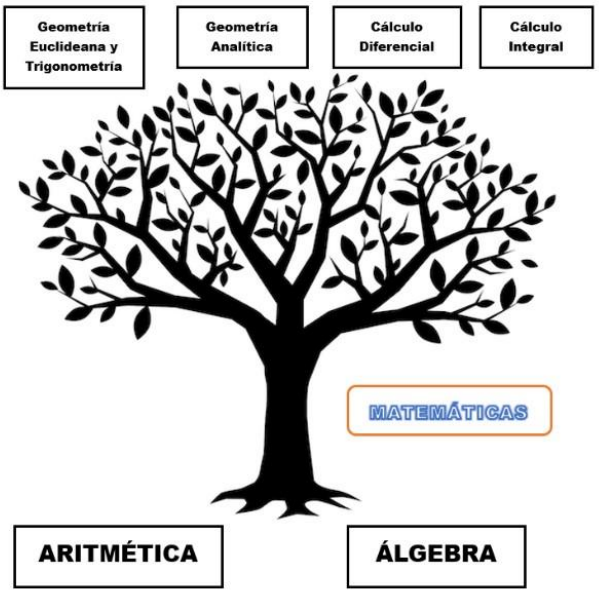


El àrbol de las Matemáticas Fuente: Freepik, modificado por Ramon Ferrer i Marí.

CURSO COMPLETO DE MATEMÁTICAS (50 TEMAS)

Matemáticas explicadas para un/a niño/a de ocho años.

DESCRIPCIÓN BREVE

50 temas que abarcan la E.S.O. el BACHILLERATO y NIVEL UNIVERSITARIO, de los currículos vigentes en España en agosto de 2026. Contiene un anexo donde se explican las doce habilidades matemáticas mínimas que precisa conocer toda persona, para desenvolverse en la vida sin problemas.

Ramon Ferrer i Marí

[Título del curso]

📚 ÍNDICE GENERAL DEL CURSO COMPLETO DE MATEMÁTICAS (50 TEMAS)

🏛️ BLOQUE I: FUNDAMENTOS ARITMÉTICOS Y NUMÉRICOS

- **Tema 1:** Conjuntos Numéricos: De los Naturales ($\mathbb{N}$) a los Reales ($\mathbb{R}$).
- **Tema 2:** Jerarquía de Operaciones, Paréntesis y la Regla PEMDAS.
- **Tema 3:** Divisibilidad, Números Primos, M.C.D. y m.c.m.
- **Tema 4:** Fracciones: Operaciones, Simplificación y Problemas de Reparto.
- **Tema 5:** Potencias, Raíces y Leyes de los Exponentes.
- **Tema 6:** Notación Científica, Órdenes de Magnitud y Cifras Significativas.
- **Tema 7:** Proporcionalidad Directa e Inversa, Regla de Tres y Porcentajes.

📐 BLOQUE II: ÁLGEBRA CLÁSICA, POLINOMIOS Y SISTEMAS

- **Tema 8:** Lenguaje Algebraico, Monomios y Polinomios.
- **Tema 9:** Identidades Notables y Factorización (Regla de Ruffini).
- **Tema 10:** Fracciones Algebraicas y Simplificación.
- **Tema 11:** Ecuaciones Lineales de Primer Grado y Problemas Contextualizados.
- **Tema 12:** Ecuaciones de Segundo Grado (Completas e Incompletas) y el Discriminante.
- **Tema 13:** Sistemas de Ecuaciones Lineales: Métodos de Sustitución, Igualación y Reducción.

- **Tema 14:** Inecuaciones Lineales y Cuadráticas: Intervalos en la Recta Real.

📈 BLOQUE III: ANÁLISIS, FUNCIONES Y CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

- **Tema 15:** El Concepto de Función: Dominio, Recorrido, Crecimiento y Simetría.
- **Tema 16:** Funciones Polinómicas: Rectas ($y = mx + n$) y Parábolas ($y = ax^2 + bx + c$).
- **Tema 17:** Funciones Exponenciales y Logarítmicas: Propiedades y Ecuaciones.
- **Tema 18:** Trigonometría Plana: Razones Trigonométricas y el Teorema de Pitágoras.
- **Tema 19:** Teoremas del Seno y del Coseno: Resolución de Triángulos Generales.
- **Tema 20:** Límites de Funciones y Continuidad: Resolución de Indeterminaciones.
- **Tema 21:** La Derivada: Tasa de Variación Instantánea, Reglas y Recta Tangente.
- **Tema 22:** Optimización: Máximos, Mínimos y Estudio de Curvas.
- **Tema 23:** La Integral Indefinida: Métodos de Integración Básicos e Inmediatos.
- **Tema 24:** La Integral Definida: Regla de Barrow y Cálculo de Áreas Planas.

📐 BLOQUE IV: GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO

- **Tema 25:** Geometría Plana: Áreas, Perímetros y Teorema de Tales.
- **Tema 26:** Geometría 3D: Cuerpos de Revolución, Poliedros y Teorema de Euler.
- **Tema 43:** Vectores en Tres Dimensiones (3D), Producto Escalar y Producto Vectorial.

- **Tema 44:** Rectas, Planos y Posiciones Relativas en el Espacio.
- **Tema 45:** Métrica Espacial: Distancias, Ángulos y Proyecciones en 3D.
- **Tema 46:** El Producto Mixto: Volúmenes de Cuerpos y Distancia entre Rectas Cruzadas.
- **Tema 47:** Proyecciones Ortogonales y Puntos Simétricos en 3D.
- **Tema 48:** Secciones Cónicas: Circunferencia, Elipse, Hipérbola y Parábola.

🎲 BLOQUE V: COMBINATORIA, PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

- **Tema 27:** Combinatoria y Principios de Conteo: Permutaciones, Variaciones y Combinaciones.
- **Tema 28:** Probabilidad Clásica, Regla de Laplace y Sucesos Compuestos.
- **Tema 29:** Estadística Descriptiva: Tablas de Frecuencias, Media, Mediana, Moda y Rango.
- **Tema 38:** Distribución Normal, Campana de Gauss, Desviación Típica y Regla Empírica.

💼 BLOQUE VI: MATEMÁTICAS APLICADAS, MODELIZACIÓN Y COMPUTACIÓN

- **Tema 30:** Matemática Financiera: Interés Simple, Interés Compuesto y Valor Temporal del Dinero.
- **Tema 31:** Álgebra Lineal: Matrices, Operaciones y Determinantes 2×2.
- **Tema 32:** Lógica Matemática, Álgebra de Boole, Tablas de Verdad y Algoritmos.
- **Tema 33:** Teoría de Grafos, Redes y los Puentes de Königsberg.

- **Tema 35:** Criptografía: Del Cifrado César a la Clave Pública y el Sistema RSA.
- **Tema 36:** Teoría de Juegos, Estrategias Dominantes y el Equilibrio de Nash.
- **Tema 41:** Ecuaciones Diferenciales y Modelos de Crecimiento/Decaimiento Exponencial.
- **Tema 42:** Programación Lineal: Optimización, Región Factible y Algoritmo Gráfico.

🌌 BLOQUE VII: FRONTERAS DE LA MATEMÁTICA MODERNA Y ABSTRACCIÓN

- **Tema 34:** Geometría Fractal, Autosimilitud, Dimensión Fractal y Teoría del Caos.
- **Tema 37:** Topología: La Geometría de la Plastilina, Banda de Möbius y Superficies.
- **Tema 39:** Números Complejos ($\mathbb{C}$), Plano de Gauss y Raíces Negativas.
- **Tema 40:** Forma Polar de los Complejos, Teorema de De Moivre y la Identidad de Euler.
- **Tema 49:** Análisis Armónico: Series y Transformada de Fourier.
- **Tema 50:** El Infinito Matemático: Cardinales de Cantor, Hotel de Hilbert e Hipótesis del Continuo.

➢ ANEXO: LAS MATEMÁTICAS MÍNIMAS QUE TODA PERSONA DEBE CONOCER Y MANEJAR CON SOLTURA EN LA VIDA……PÁGINA 310.

A MODO DE INTRODUCCIÓN.

La dificultad de las matemáticas

Una de las razones por la que las matemáticas resultan difíciles es porque requieren un tipo de pensamiento diferente al de muchas otras asignaturas; ***más lógico, sistemático y abstracto****. Esto supone un desafío para los estudiantes que no se sienten cómodos con este tipo de pensamiento, que no han desarrollado aún habilidades fuertes de resolución de problemas o que presentan dificultades de aprendizaje directamente relacionadas con este tipo de pensamiento, como la discalculia*[1]*.*

Otra razón es la estructura jerárquica de las matemáticas, que requiere un aprendizaje muy secuencial: muchos de los nuevos conceptos se construyen sobre los conceptos que le preceden. Esto implica que, si un alumno no adquiere un conocimiento en un momento dado, le puede resultar difícil entender los conceptos que llegan después. Esto puede dar lugar a una sensación de «quedarse atrás» que, prolongada en el tiempo, se vuelve irremediable.

Además, es probable que algunos de estos alumnos desarrollen falta de confianza en sus habilidades matemáticas, lo que puede desencadenar experiencias negativas que no hacen más que alimentar estas inseguridades. (…).

Refuerza las habilidades socioemocionales

Ayuda a tus alumnos a desarrollar una ***actitud positiva*** *hacia las matemáticas elogiando su esfuerzo y progreso en vez de solo su resultado final. Anímalos a perseverar y a no rendirse, y recuérdales que no deben temer al error.*

En general, los bloqueos en matemáticas son comunes, pero se pueden superar con la mentalidad y las estrategias correctas. Si fomentas una mentalidad de crecimiento, proporcionas muchas oportunidades de práctica y usas materiales prácticos y ayudas visuales, puedes ayudar a tus alumnos a superar las inseguridades en matemáticas y a disfrutar del aprendizaje. (…).".

Ya hemos visto que las matemáticas presentan dos grandes dificultades: que son abstractas y secuenciales.

[1] P**atrón de dificultades que se caracteriza por problemas de procesamiento de la información numérica**, el aprendizaje de operaciones aritméticas y el cálculo correcto y fluido. En definitiva, la dificultad por procesar la información numérica. Muchas veces, los alumnos con discalculia son competentes en otras áreas, pero en el ámbito numérico presentan serias dificultades.

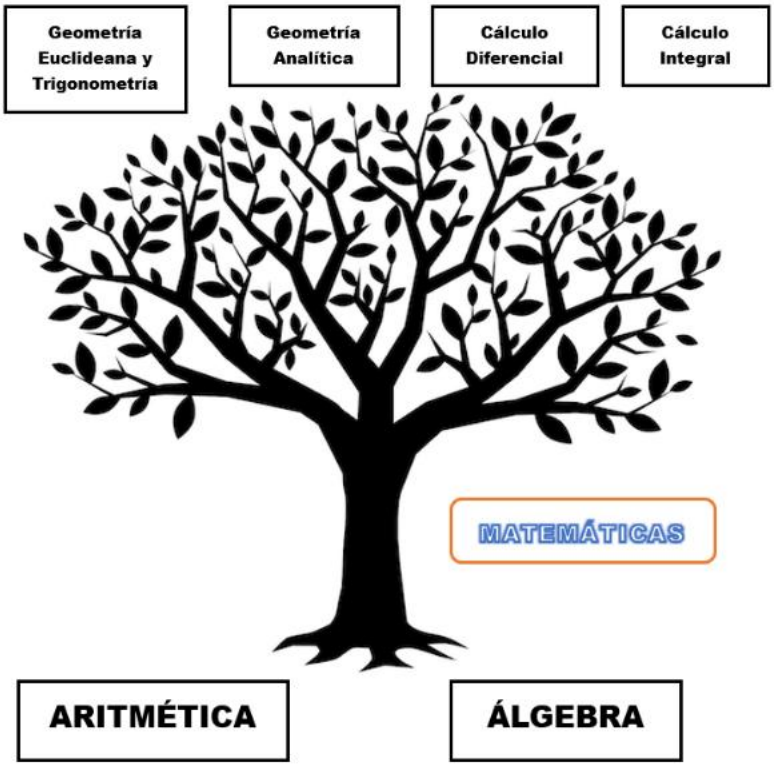
Las matemáticas han de ser forzosamente abstractas, puesto que no dejan de ser una herramienta que nos ayuda a describir una parte del mundo. El número 2 implica que hay dos unidades de algo, que son 1 + 1 unidades, por ejemplo, manzanas, que es el ejemplo típico que se usa para explicarnos aritmética, cuando somos niños/as.

La secuencialidad la podemos definir en seis àreas básicas, siendo la Aritmética y el Álgebra, los cimientos que sostienen a las otras cuatro:

1. Aritmética.
2. Álgebra.
3. Geometría Euclideana y Trigonometría.
4. Geometría Analítica.
5. Cálculo Diferencial.
6. Cálculo Integral.

Las dos primeras, Aritmética y Álgebra, son el a,e,i,o,u, o sea, lo más básico. Es imprescindible obtener un buen dominio sobre esas dos materias o será imposible alcanzar a dominar a las Matemáticas. Las otras cuatro son: La Geometría Euclideana y Trigonometría, la Geometria Analítica, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Por eso he creado la imagen que ilustra la portada de este libro.



El àrbol de las Matemáticas Fuente: Freepik, modificado por Ramon Ferrer i Marí.

Si por el contrário te aproximas a esta obra con la esperanza de saber cúántas Matemáticas te hacen falta para tu quehacer cotidiano, y no necesitas ser un experto en ellas, **vé directamente a la Página 310. Allí tienes explicadas las doce habilidades matemáticas básicas que precisas.**

Te deseo la mayor de las suertes en este apasionante viaje.

🗺️ GUÍA CURRICULAR: CORRESPONDENCIA DE LOS 50 TEMAS CON EL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL (ESO, BACHILLERATO Y UNIVERSIDAD)

📌 Introducción y Contexto Curricular

El temario de 50 temas conforma un itinerario formativo completo y progresivo. Va desde las bases numéricas elementales hasta conceptos de vanguardia en ciencia, ingeniería y computación.

En el sistema educativo español, el aprendizaje matemático se estructura en tres grandes etapas:

1. **Educación Secundaria Obligatoria (ESO): 1.º a 4.º de ESO (12 a 16 años). Construye la base operativa: aritmética, álgebra inicial, geometría plana/espacial básica, estadística descriptiva y probabilidad elemental.**
2. **Bachillerato: 1.º y 2.º de Bachillerato (16 a 18 años), especialmente en las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Ciencias Sociales*. Introduce el análisis formal (límites, derivadas, integrales), la geometría analítica vectorial 3D, el álgebra matricial, la optimización y las distribuciones de probabilidad continuas.**
3. **Universidad (Grados STEM, Economía y Computación): 18 años en adelante. Aborda el rigor formal, la modelización mediante ecuaciones diferenciales, el análisis armónico, la**

teoría de grafos, las estructuras abstractas y los fundamentos de la computación teórica.

📊 Tabla General de Correspondencia Nivel a Nivel

Nivel Educativo	Cursos / Etapas	Rango de Temas Principales	Enfoque Pedagógico
ESO Inicial / Media	1.º, 2.º y 3.º de ESO	Temas 1 al 7, 11, 25, 29, 30	Aritmética, proporcionalidad, ecuaciones simples, estadística básica y geometría plana.
ESO Avanzada / Transición	4.º de ESO (Académicas / Aplicadas)	Temas 8 al 10, 12 al 16, 18, 26, 27, 28	Polinomios, sistemas, trigonometría básica, funciones elementales y combinatoria.

Nivel Educativo	Cursos / Etapas	Rango de Temas Principales	Enfoque Pedagógico
Bachillerato	1.º y 2.º de Bachillerato (Ciencias / Sociales)	Temas 17, 19 al 24, 31, 38, 39, 40, 42 al 48	Análisis matemático (cálculo infinitesimal), álgebra lineal, geometría 3D, cónicas y normal.
Universidad / Superior	Grados en Matemáticas, Física, Ingeniería, Informática, Economía	Temas 32 al 37, 41, 49, 50	Ecuaciones diferenciales, Fourier, grafos, topología, fractales, criptografía y teoría de conjuntos.

🔍 Desglose Detallado: Nivel Educativo de Cada Uno de los 50 Temas

🟢 BLOQUE A: NIVEL ESO ($1.^\circ$ a $4.^\circ$ de ESO)

- **Tema 1: Conjuntos Numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) → $1.^\circ$ a $3.^\circ$ de ESO. Clasificación de números y representación en la recta real.**

- **Tema 2: Jerarquía de Operaciones y Regla PEMDAS → $1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de ESO. Operaciones combinadas elementales con signos y paréntesis.**
- **Tema 3: Divisibilidad, Números Primos, M.C.D. y m.c.m. → $1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de ESO. Descomposición factorial y problemas de coincidencia/reparto.**
- **Tema 4: Fracciones y Operaciones → $1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de ESO. Suma, producto, cociente y problemas de fracciones.**
- **Tema 5: Potencias, Raíces y Leyes de Exponentes → $2.^{\circ}$ y $3.^{\circ}$ de ESO. Propiedades de potencias de exponente entero y radicales sencillos.**
- **Tema 6: Notación Científica y Cifras Significativas → $3.^{\circ}$ de ESO. Expresión de cantidades astronómicas/microscópicas y redondeo.**
- **Tema 7: Proporcionalidad Directa/Inversa y Porcentajes → $1.^{\circ}$ a $3.^{\circ}$ de ESO. Regla de tres, aumentos y descuentos porcentuales.**
- **Tema 8: Lenguaje Algebraico, Monomios y Polinomios → $2.^{\circ}$ y $3.^{\circ}$ de ESO. Traducción algebraica y operaciones con polinomios.**
- **Tema 9: Identidades Notables y Regla de Ruffini → $3.^{\circ}$ y $4.^{\circ}$ de ESO. Cuadrados de binomios, factorización y raíces de polinomios.**
- **Tema 10: Fracciones Algebraicas → $4.^{\circ}$ de ESO. Simplificación y operaciones con fracciones que contienen polinomios.**
- **Tema 11: Ecuaciones de Primer Grado → $1.^{\circ}$ a $3.^{\circ}$ de ESO. Resolución de ecuaciones lineales con denominadores y problemas asociados.**

- **Tema 12: Ecuaciones de Segundo Grado y Discriminante $\rightarrow 2.^{\circ}$ a $4.^{\circ}$ de ESO. Ecuaciones completas, incompletas y análisis del signo del discriminante Δ.**
- **Tema 13: Sistemas de Ecuaciones Lineales (2×2) $\rightarrow 2.^{\circ}$ a $4.^{\circ}$ de ESO. Métodos algebraicos (sustitución, igualación, reducción) e interpretación gráfica.**
- **Tema 14: Inecuaciones Lineales y Cuadráticas $\rightarrow 4.^{\circ}$ de ESO. Intervalos, desigualdades algebraicas y estudio de signos en la recta.**
- **Tema 15: Concepto de Función, Dominio y Recorrido $\rightarrow 3.^{\circ}$ y $4.^{\circ}$ de ESO. Lectura gráfica de funciones, continuidad visual, monotonía y extremos.**
- **Tema 16: Funciones Polinómicas (Rectas y Parábolas) $\rightarrow 3.^{\circ}$ y $4.^{\circ}$ de ESO. Pendiente, ordenada en el origen, vértice y representación de parábolas.**
- **Tema 18: Trigonometría Básica y Teorema de Pitágoras $\rightarrow 4.^{\circ}$ de ESO. Seno, coseno, tangente en el triángulo rectángulo y razones fundamentales.**
- **Tema 25: Geometría Plana, Áreas y Teorema de Tales $\rightarrow 1.^{\circ}$ a $3.^{\circ}$ de ESO. Semejanza de triángulos, perímetros y áreas poligonales.**
- **Tema 26: Geometría 3D y Cuerpos de Revolución $\rightarrow 2.^{\circ}$ y $3.^{\circ}$ de ESO. Prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas y Teorema de Euler ($C + V = A + 2$).**
- **Tema 27: Combinatoria (Permutaciones, Variaciones, Combinaciones) $\rightarrow 4.^{\circ}$ de ESO. Principios de conteo, factoriales y números combinatorios.**

- **Tema 28: Probabilidad Clásica y Regla de Laplace → $2.^{\circ}$ a $4.^{\circ}$ de ESO. Experimentos simples, espacio muestral, suceso contrario y regla del producto.**
- **Tema 29: Estadística Descriptiva (Media, Mediana, Moda) → $1.^{\circ}$ a $3.^{\circ}$ de ESO. Tablas de frecuencias, parámetros de centralización y diagramas de barras.**
- **Tema 30: Matemática Financiera Básica (Interés Simple y Compuesto) → $3.^{\circ}$ y $4.^{\circ}$ de ESO(Matemáticas Aplicadas). Fórmulas de capitalización y tasa de interés anual.**

🔵 **BLOQUE B: NIVEL BACHILLERATO ($1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de Bachillerato)**

- **Tema 17: Funciones Exponenciales y Logarítmicas → $1.^{\circ}$ de Bachillerato. Propiedades de los logaritmos, crecimiento exponencial y asíntotas.**
- **Tema 19: Teoremas del Seno y del Coseno → $1.^{\circ}$ de Bachillerato. Resolución de triángulos oblicuángulos generales y problemas de topografía.**
- **Tema 20: Límites de Funciones y Continuidad → $1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Indeterminaciones $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, límites laterales y tipos de discontinuidades.**
- **Tema 21: La Derivada y Reglas de Derivación → $1.^{\circ}$ y $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Tasa de variación instantánea, regla de la cadena y recta tangente.**
- **Tema 22: Optimización y Estudio Completo de Curvas → $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Puntos críticos, máximos, mínimos, curvatura y problemas de optimización (EBAU/PAU).**

- **Tema 23: La Integral Indefinida → $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Primitivas, integrales inmediatas, métodos por partes y racionales simples.**
- **Tema 24: La Integral Definida y Regla de Barrow → $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Teorema fundamental del cálculo y cálculo exacto de áreas bajo y entre curvas.**
- **Tema 31: Matrices y Determinantes → $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Operaciones matriciales, determinantes 2×2 y 3×3, matriz inversa y sistemas de ecuaciones (Rouché-Frobenius).**
- **Tema 38: Distribución Normal y Regla Empírica → $2.^{\circ}$ de Bachillerato. Parámetros μ y σ, tipificación Z, uso de la tabla $N(0,1)$ e inferencia estadística.**
- **Tema 39: Números Complejos ($\mathbb{C}$) → $1.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Unidad imaginaria i, forma binómica, conjugado y raíces de polinomios reales.**
- **Tema 40: Forma Polar y Teorema de De Moivre → $1.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Módulo-argumento, giros en el plano complejo y la Identidad de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$.**
- **Tema 42: Programación Lineal → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias Sociales). Función objetivo, inecuaciones, región factible y método de los vértices (tema clásico de EBAU/PAU).**
- **Tema 43: Vectores en el Espacio 3D(Producto Escalar y Vectorial) → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Módulos, ortogonalidad y áreas mediante producto vectorial.**

- **Tema 44: Rectas y Planos en el Espacio → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Ecuaciones paramétricas/generales y estudio de posiciones relativas.**
- **Tema 45: Métrica Espacial (Distancias y Ángulos en 3D) → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Distancia punto-plano, ángulo entre rectas/planos y perpendicularidad.**
- **Tema 46: Producto Mixto y Rectas que se Cruzan → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Determinante 3×3, volúmenes de paralelepípedos/tetraedros y distancia mínima entre rectas.**
- **Tema 47: Proyecciones Ortogonales y Simetrías en 3D → $2.^{\circ}$ de Bachillerato(Modalidad Ciencias). Punto simétrico respecto a planos y rectas en el espacio.**
- **Tema 48: Secciones Cónicas y Lugares Geométricos → $1.^{\circ}$ de Bachillerato. Ecuaciones canónicas de la circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.**

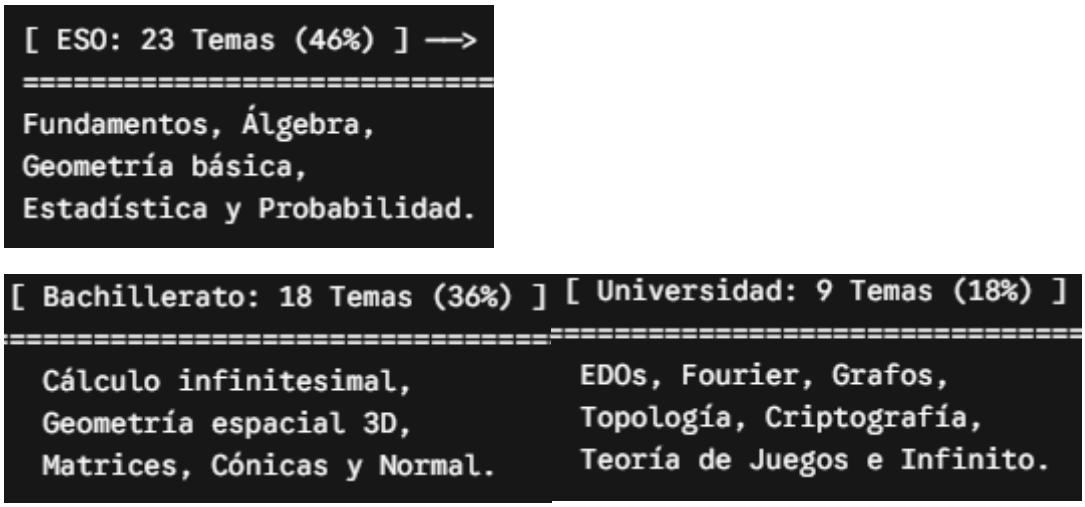
🟣 BLOQUE C: NIVEL UNIVERSITARIO / MATEMÁTICA AVANZADA

- **Tema 32: Lógica Matemática, Álgebra de Boole y Algoritmos → $1.^{er}$ Curso de Grado(Informática, Ingeniería, Matemáticas). Estructuras discretas, diseño lógico de circuitos y complejidad algorítmica.**
- **Tema 33: Teoría de Grafos y Redes (Königsberg) → $1.^{er} - 2.^{\circ}$ Curso de Grado(Matemática Discreta / Algoritmia). Caminos eulerianos, árboles, conectividad y optimización de redes.**
- **Tema 34: Geometría Fractal y Teoría del Caos →Grado en Matemáticas / Física (Sistemas**

Dinámicos). Dimensión fractal de Hausdorff, atractores extraños y sensibilidad a las condiciones iniciales.

- **Tema 35: Criptografía y Sistema RSA →Grados en Informática, Telecomunicaciones y Ciberseguridad. Aritmética modular avanzada, primalidad, curvas elípticas y clave asimétrica.**
- **Tema 36: Teoría de Juegos y Equilibrio de Nash →Grados en Economía, ADE, Matemáticas y Ciencias Políticas. Microeconomía avanzada, matrices de pagos, estrategias mixtas y toma de decisiones interactivas.**
- **Tema 37: Topología (Banda de Möbius, Homeomorfismos) →Grado en Matemáticas / Física Teórica. Espacios topológicos, invariantes, clasificación de superficies y variedades.**
- **Tema 41: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) $\rightarrow 1.^{er} - 2.^{\circ}$ Curso de Ingeniería y Ciencias. Separación de variables, modelos poblacionales continuos y física del movimiento armónico.**
- **Tema 49: Series y Transformada de Fourier $\rightarrow 2.^{\circ} - 3.^{er}$ Curso de Ingeniería (Teleco, Industrial, Sonido) y Física . Análisis armónico, procesamiento digital de señales, filtrado de frecuencias y Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs).**
- **Tema 50: El Infinito Matemático (Cantor y Hotel de Hilbert) →Fundamentos de la Matemática / Teoría de Conjuntos (Grado en Matemáticas y Filosofía de la Ciencia). Aritmética cardinal transfinita ($\aleph_0, \mathfrak{c}$), biyecciones no numerables y axioma de elección.**

📌 **Resumen de Distribución de los 50 Temas**



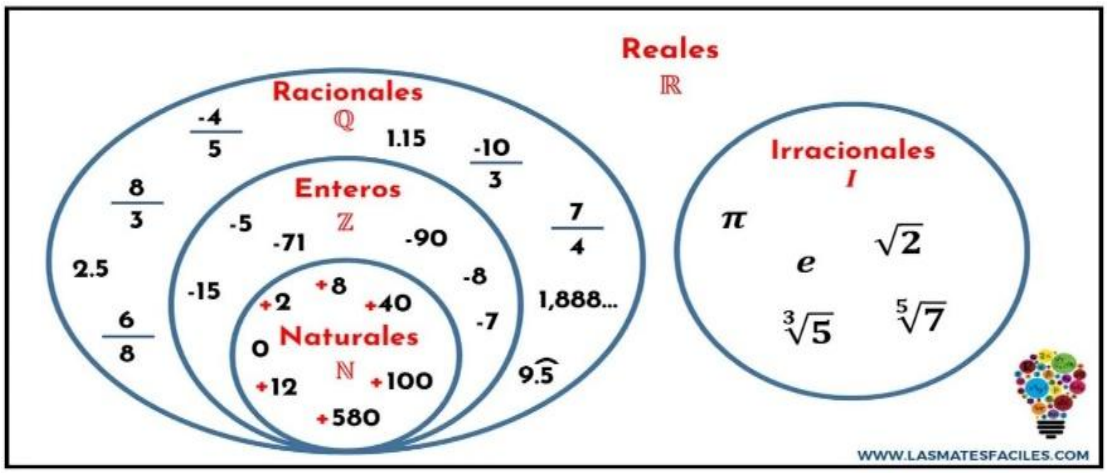
📘 MI LIBRO DE MATEMÁTICAS MÁGICAS (NIVEL INICIACIÓN A SECUNDARIA)

🌼 TEMA 1: EL CASTILLO DE LOS NÚMEROS Y LAS 4 REGLAS BÁSICAS

1.1. ¿De dónde vienen los números?

Imagina que hace miles de años no existían las palabras "dos", "cuatro" ni "diez". Si una persona quería contar cuántas ovejas salían de la cueva, usaba piedritas en un saco: una piedra por cada oveja. Luego usaron los diez dedos de las manos, y por eso hoy contamos en grupos de diez (nuestro sistema decimal de Base 10).

- **Números Naturales ($\mathbb{N}$):** Son los números que usamos para contar cosas enteras y bonitas: $0,1,2,3,4,5\ldots$
- **Números Enteros ($\mathbb{Z}$):** ¿Qué pasa si te presto 3 caramelos y me debes esos caramelos? Necesitamos números con signo negativo $(-)$: $\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3\ldots$
- **Fracciones y Racionales ($\mathbb{Q}$):** Cuando cortamos una tarta en trozos iguales, como partir 1 tarta entre 2 amigos: $\frac{1}{2}$.



1.2. El Mapa Secreto de las Operaciones (Regla PEMDAS)

Cuando tienes una mezcla de números sumando, restando y multiplicando, no puedes resolverlos a lo loco. Hay un orden de llegada, como en una carrera de coches:

1. 🏰 **P**rimero: **Paréntesis** (…) (Los paquetes cerrados se abren primero).
2. 🚀 **E**xponentes y Raíces (a^2, $\sqrt{a}$).
3. ⚔️ **M**ultiplicaciones y **D**ivisiones (de izquierda a derecha).
4. 🚶 **A**diciones (Sumas) y **S**ustracciones (Restas).

1.3. La Regla de los Signos (Los Amigos y Enemigos)

- Los amigos de mis amigos son mis amigos: $(+)\cdot(+)=+$
- Los enemigos de mis enemigos son mis amigos: $(-)\cdot(-)=+$
- El amigo de mi enemigo es mi enemigo: $(+)\cdot(-)=-$
- El enemigo de mi amigo es mi enemigo: $(-)\cdot(+)=-$

Otra manera de explicarlo:

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?

Si tiramos de diccionario, el de la RAE específicamente, nos da la siguiente definición:

"*Matemática. F. Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.*"

A ver, como definición, queda muy molona y tampoco podemos pedir más. Pero vayamos un poco más allá.

Si intento quintaesenciar, es decir, reducir a la explicación más sencilla posible, una de las características o razones de existencia de las matematicas, ésta es la de averiguar un *dato*[2] que desconocemos, al que llamamos *incógnita*[3], a base de realizar alguna manipulación a la que llamaremos *operación*[4] con, al menos, otros dos *datos* que sí conocemos.

Ejemplo: ¿Cuál es el resultado (*incógnita*) de la suma (*operación*) de 6+4 (*datos*)?. Pues si sumamos 6+4 nos dá como resultado de la incógnita el número natural 10.

¿Y por qué los humanos nos metimos en éste berenjenal?

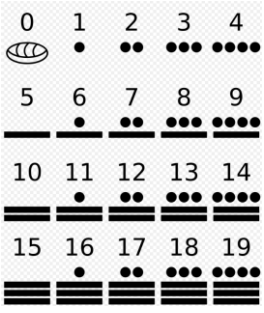
Pues por curiosidad y sentido práctico. Desde muy antiguo hemos tenido la necesidad natural de saber cuántos miembros de la tribu éramos, cuántos trozos de carne teníamos para repartir y cuántas bayas y frutos silvestres habían recogido las mujeres.

Imagina que tenemos tres trozos de carne y hemos de informar al jefe de la tribu, que está en la otra punta del valle… A ver cómo se lo decimos si, primero, no desarrollamos un sistema numérico.

Así que, para esas primeras representaciones, el ser humano echó mano de lo que tenía… y lo más fácil eran los dedos de las manos, por eso nuestro sistema numérico es decimal, es decir, que lo contamos todo, de diez en diez. A eso le llamamos Base 10.

Sistemas de numeración ha habido bastantes a lo largo de la historia y del planeta. Veamos algunos ejemplos:

En la América prehispánica tenemos el sistema Maya, sobre base 5.



Sistema de numeración Maya. Original: Neuromancer2K4 Vector: Bryan Derksen

[2] Información sobre algo concreto que permite su conocimiento exacto o sirve para deducir las consecuencias derivadas de un hecho.

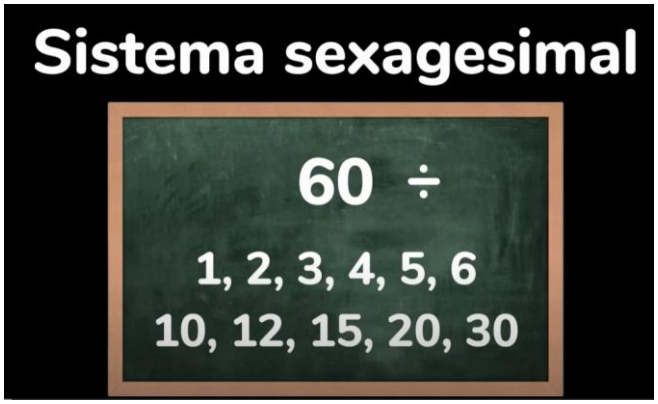
[3] Cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema para resolverlos. Diccionario RAE.

[4] Acción, maniobra o conjunto de acciones destinadas a obtener un resultado concreto.

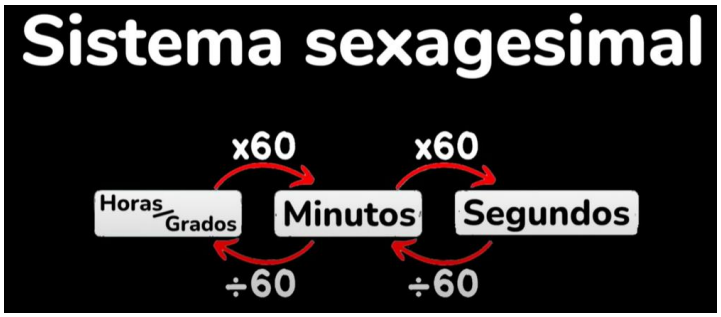
En el antiguo Egipto tenían uno en Base 10 y en la cuna de la civilización, Babilonia lo tenían en Base 60, por poner sólo tres ejemplos.

¿Y por qué en Base 60?... A ver, no era por capricho, porque tiene su lógica:

El 60 es divisible entre 11 números diferentes, como vemos a continuación



Y en nuestro sistema numèrico actual, contamos las horas y los grados de 60 en 60, tal y como lo hacían ellos.



Respecto a la representación gráfica de los números, hacemos servir el sistema indoarábigo, tambíen en Base 10, que tiene la ventaja de representar cada número, del 1 al 9 con un solo símbolo, e incorpora el cero como elemento neutro. Y permite ampliar las cantidades hasta el infinito, con sólo ir añadiendo números por delante o por detrás:

Si al 5 le añadimos un 7 por delante pasamos a tener 75 elementos y si le ponemos tres ceros por detrás, ahora tenemos el número 75000 (setenta y cinco mil)… Fácil ¿No?

Lectura y escritura

Un número en el sistema decimal se escribe o se lee con base en la siguiente tabla:

Billones			Millares de millón			Millones			Millares			Unidades		
Centenas de billón	Decenas de billón	Unidades de billón	Centenas de millares de millón	Decenas de millares de millón	Unidades de millares de millón	Centenas de millón	Decenas de millón	Unidades de millón	Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades

En la tabla, los billones, millares de millón, millones, millares y unidades reciben el nombre de periodos, los que a su vez se dividen en clases y cada una de éstas se forma por unidades, decenas y centenas.

5

Fuente: Matemáticas Simplificadas. CONAMAT de México. Página 5.

En el siguiente capítulo vamos a tomar conciéncia del hecho que, en matemáticas, todo está interconectado y se requiere una buena base en Aritmética y Álgebra, para poder avanzar.

Ejemplo: Para poder resolver una derivada (Cálculo Diferencial) en la que aparecen fracciones, antes, debemos saber operar con fracciones (Aritmética).

$$x^{5/2} \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

LAS "CUATRO REGLAS" DE LA ARITMÉTICA: SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR Y DIVIDIR.

Así se han conocido tradicionalmente a las operaciones básicas de la aritmética. De hecho durante siglos, la formación más elemental que recibían nuestros antepasados se basaba en enseñarles éstas cuatro reglas, con más habilidades de lectoescritura (en cristiano, que supieran leer y escribir, ni que fuera con un montón de faltas de ortografía…). Recordemos que, durante la Edad Media, el analfabetismo era la regla, y no la excepción, en Europa.

Cuando se trata de ir añadiendo elementos, inventó la **suma**. Técnicamente se define como "*la operación que tiene por objeto reunir las unidades de varios conjuntos en uno único*".

Os dejo una tabla de sumas, donde el resultado se obtiene mediante cruzar filas y columnas.

De éste modo, si queremos saber cuanto es la suma de 9 y 7, tomamos el 9 de la zona de columnas (la numeración de arriba) y lo cruzamos con el 7 que aparece en la zona de filas (la numeración de más a la izquierda) y el resultado que nos dá es 16.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Fuente: es.tableworld.net Tablas Online.

Vale, todo esto está muy bien y funciona de coña cuando se trata de ir añadiendo elementos, ¿Pero qué hacemos si, en lugar de añadir elementos, queremos quitarlos? ¿Y cómo narices lo hacemos para describir la situación en la que no tenemos ningún elemento?.

Pues para ello, aparte de la operación de la resta, hubo que inventar los números negativos: …-5,-4,-3,-2,-1. Y para la situación en la que no hay ningún elemento se inventó el 0 (cero).

Os dejo un recorte de Matemáticas Simplificadas del CONAMAT de México. Página 4 donde lo explican y amplían mejor que yo.

Clasificación

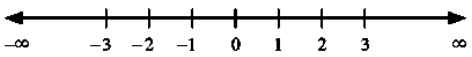
El hombre ha tenido la necesidad de contar desde su aparición sobre la Tierra hasta nuestros días, para hacerlo se auxilió de los números 1, 2, 3, 4, 5,…, a los que llamó números naturales. Números que construyó con base en el principio de adición; sin embargo, pronto se dio cuenta de que este principio no aplicaba para aquellas situaciones en las que necesitaba descontar. Es entonces que creó los números negativos, así como el elemento neutro (cero), que con los números naturales forman el conjunto de los números enteros, los cuales son:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Asimismo, se percató que al tomar sólo una parte de un número surgían los números racionales, que se expresan como el cociente de 2 números enteros, con el divisor distinto de cero, ejemplo: $\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{5}, \frac{6}{1}, -\frac{8}{2}, \ldots$

Aquellos números que no es posible expresar como el cociente de 2 números enteros, se conocen como números irracionales: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{81}, \pi, \ldots$

Al unir los números anteriores se forman los números reales, los cuales se representan en la recta numérica.



La **resta** es la operación inversa a la suma:

$$y - b = z \qquad 5 - 2 = 3$$

donde “y” se llama *Minuendo*, “b” se llama *sustraendo* y el resultado “c” se denomina *diferencia.*

El resultado puede dar un numero positivo o uno negativo, caso que el sustraendo sea un numero mayor que el minuendo

$$7 - 9 = -2$$

Otra manera de definir la resta es decir que es la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo

$$y + (-b) = z \qquad 5 + (-2) = 3$$

La regla de los signos del producto de los números enteros y racionales se sigue manteniendo con los números reales. En general, si multiplicamos signos iguales nos dá la el signo positivo (+), es decir

$$(+) * (+) = (+) \quad +2 * +2 = +4$$

$$(-) * (-) = (+) \quad -2 * -2 = +4$$

Mientras que si multiplicamos signos diferentes, nos dá el signo negativo (-), es decir

$$(+) * (-) = (-) \quad +2 * -3 = -6$$

$$(-) * (+) = (-) \quad -5 * +2 = -10$$

La **multiplicación** es el acto de sumar varias veces la misma cantidad, o sea, Una multiplicación se puede definir como una sucesión de sumas. En este caso, sumaremos el número A entre sí, B número de veces

$$A \times B = A + A + A \ldots \text{B número de veces}$$

Así pues si multiplicamos 3 x 2, lo que estamos haciendo es sumar dos veces el número tres.

$$3 \times 2 = 3 + 3 = 6$$

Os dejo una tabla que sirve para hallar las multiplicaciones y que sigue los mismos princípios operativos que la de la suma.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fuente: Educando en la diversidad. https://educandoenladiversidad-gomi.blogspot.com/2012/04/los-acnees-y-las-tablas-de-multiplicar.html.

De su observación podemos deducir tres cosas:

a) Tabla del 0. Todo número multiplicado por 0 es 0.
b) Tabla del 1. Todo número multiplicado por 1 es ese mismo número. 5x1=5.
c) Tabla del 10. Sólo hay que añadir un 0 por la derecha, al número que multiplicamos. 5x10=50.

La **división** es la cuarta y última regla aritmética y la podemos definir como la acción de repartir una entidad, entre cierto número de elementos. Así pues, tenemos una entidad, llamada Dividendo (el número 24) que repartimos entre cierto número de elementos Divisor (el número 12) y cuyo resultado se llama Cociente (el número 2). Si multiplicamos el Cociente por el Divisor, regresaremos al Dividendo.

En cristiano, que es la operación inversa a la multiplicación. A ver si esto deja las cosas más claras:

24 ÷ 12 = 2 porque es la operación inversa, de hacer 12 x 2 = 24.

Dividendo	Divisor
	Cociente

24	12
00	2

Dicho de otro modo, **Una división se puede definir como una sucesión de restas**. En el ejemplo anterior:

1ª resta: 24 - 12= 12

2ª resta: 12 - 12= 0

Por lo que 24 ÷ 12=2 porque hemos necesitado 2 restas sucesivas para llegar a 0.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 1.1

Calcula la siguiente expresión:

$$E = 8 + 3 \cdot (5 + 2) - 4^2$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Resolver el interior del paréntesis.** Miramos dentro de $(5 + 2)$.

$$5 + 2 = 7$$

💡 **Inciso pedagógico (¿Por qué hacemos esto primero?):** Según la regla PEMDAS, los paréntesis son cajas fuertes que debemos abrir antes de poder juntar su contenido con los números de fuera.

La operación queda:

$$8 + 3 \cdot 7 - 4^2$$

- **Paso 2: Resolver las potencias.** Calculamos 4^2.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

💡 **Inciso pedagógico (Ley de la potencia):** Un número elevado a 2 significa multiplicar ese número por sí mismo 2 veces. No es $4 \cdot 2 = 8$, sino $4 \cdot 4 = 16$.

La operación queda:

$$8 + 3 \cdot 7 - 16$$

- **Paso 3: Resolver la multiplicación.** Calculamos $3 \cdot 7$.

$$3 \cdot 7 = 21$$

💡 **Inciso pedagógico (Prioridad de operaciones):** Jamás sumes $8 + 3$ antes de multiplicar por 7. La multiplicación une los números con más fuerza que la suma.

La operación queda:

$$8 + 21 - 16$$

- **Paso 4: Sumas y restas de izquierda a derecha.**
  - Sumamos: $8 + 21 = 29$
  - Restamos: $29 - 16 = 13$
- **Resultado final:** 13

Ejercicio Resuelto 1.2

Aplica las leyes de potencias para simplificar:

$$A = \frac{2^3 \cdot 2^4}{2^2}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Simplificar el numerador usando producto de potencias.**

Calculamos $2^3 \cdot 2^4$.

💡 **Inciso pedagógico (Ley del producto de exponentes con igual base):** Cuando multiplicamos potencias con la misma base (2), dejamos la base quieta y sumamos los exponentes: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Aquí: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.

La fracción queda:

$$\frac{2^7}{2^2}$$

- **Paso 2: Resolver la división de potencias.**

💡 **Inciso pedagógico (Ley del cociente de exponentes con igual base):** Al dividir potencias con la misma base, dejamos la base quieta y restamos el exponente de arriba menos el de abajo: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Aquí: $\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5$.

- **Paso 3: Calcular el valor numérico.**

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

- **Resultado final:** 32

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

Intenta resolver los siguientes ejercicios en tu libreta. Al final del bloque tienes las soluciones paso a paso. Confío en ti, en que no te harás trampa a ti mismo/a e irás directamente a los resultados. La práctica es el tercer pilar más importante, tras leer el ejercicio y entender qué te están pidiendo.

1. **Propuesto 1.1:** Resuelve la siguiente operación combinada:

$$10 - 2 \cdot (3 + 1) + 5 \cdot 2^2$$

(Solución indicada: 22)

2. **Propuesto 1.2:** Simplifica usando las leyes de exponentes y halla el número final:

$$\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^4}$$

(Solución indicada: 27)

3. **Propuesto 1.3:** Resuelve el siguiente misterio de signos:

$$-(-4) + (-3) \cdot 2 - (-5)$$

(Solución indicada: 3)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 1.1

- **Enunciado:** $10 - 2 \cdot (3 + 1) + 5 \cdot 2^2$
- **Desarrollo:**
    1. *Paréntesis:* Resolvemos $(3 + 1) = 4$. La expresión queda: $10 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2^2$.
    2. *Potencias:* Calculamos $2^2 = 4$. La expresión queda: $10 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4$.
    3. *Multiplicaciones:*
        - $-2 \cdot 4 = -8$
        - $5 \cdot 4 = 20$
        - La expresión queda: $10 - 8 + 20$.
    4. *Sumas y restas:*
        - $10 - 8 = 2$
        - $2 + 20 = 22$.
- **Resultado:** 22

Solución del Propuesto 1.2

- **Enunciado:** $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^4}$
- **Desarrollo:**
    1. *Inciso de producto de potencias:* Arriba sumamos exponentes ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$): $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$.
    2. *Inciso de cociente de potencias:* Dividimos restando exponentes ($\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$): $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$.
    3. *Cálculo final:* $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
- **Resultado:** 27

Solución del Propuesto 1.3

- **Enunciado:** $-(-4) + (-3) \cdot 2 - (-5)$
- **Desarrollo:**

1. *Inciso de multiplicación:* Primero hacemos $(-3) \cdot 2 = -6$ (negativo por positivo da negativo).
2. *Inciso de eliminación de signos consecutivos:*
   - $-(-4)$ se convierte en $+4$.
   - $-(-5)$ se convierte en $+5$.
3. *Juntamos todo:* $+4 - 6 + 5$.
4. *Operamos:* $4 - 6 = -2$, y luego $-2 + 5 = +3$.

- **Resultado:** 3

📘 TEMA 2: FRACCIONES, DECIMALES Y LA MAGIA DE LAS PROPORCIONES

2.1. ¿Qué es una fracción? La fiesta de las pizzas

Imagina que pedimos una pizza gigante y la cortamos en **4 trozos iguales**.

- Si te comes **1 trozo**, te has comido $\frac{1}{4}$ de la pizza.
- El número de abajo se llama **Denominador**: nos dice en cuántas partes iguales cortamos la pizza (el total).
- El número de arriba se llama **Numerador**: nos dice cuántos trozos tomamos para nosotros.

$$\frac{\text{Numerador (trozos que tengo)}}{\text{Denominador (trozos en total)}}$$

💡 **Regla de Oro:** Si el numerador y el denominador son iguales, ¡tenemos la pizza entera!

$$\frac{4}{4} = 1, \frac{8}{8} = 1.$$

Los racionales son aquellos números que pueden representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

O dicho en cristiano, se expresan en forma de quebrado, siempre que el número de abajo sea diferente de cero, en cuyo caso, tanto en aritmética como en álgebra, se conoce como "indefinido" o como "infinito"

$\frac{1}{2} - \frac{9}{4}$ ... $\frac{2}{0}$ = indefinido o infinito

¿Y por qué un número dividido entre cero da indefinido o infinito?

Una operación de división se puede definir como el acto de repartir una cantidad de algo, lo que sea entre una cantidad arbitraria de otra cosa.

Por ejemplo, el primer día tenemos 10 naranjas y dos chicas, que se llaman Rosa y Laura. Si las repartimos (dividimos), resulta que tocan a cinco unidades para cada una.

Al segundo día sólo viene Laura, así que al dividir 10 naranjas entre una persona… resulta que Laura se las queda todas.

Al tercer día, no viene ninguna chica, con lo que vamos a dividir 10 naranjas entre cero personas.

¿Cómo narices vas a dividir algo, si no hay nadie para repartir?

No tiene sentido, pero las matemáticas no siempre hablan de *Citrus sinensis* (naranjas) y personas.

Desarrollemos el ejemplo de Rosa y Laura, pero en genérico, es decir, sin naranjas y sin las chicas.

Una división se puede definir como una sucesión de restas, tal y como hemos explicado en la página 31.

Decíamos que 10 dividido entre 2 es igual a 5. Vamos a realizar una sucesión de restas hasta que nos dé cero.

1ª resta → 10–2 = 8

2ª resta → 8–2 = 6

3ª resta → 6–2 = 4

4ª resta → 4–2 = 2

5ª resta → 2–2=0

¿Cuántas restas hemos hecho? pues cinco.

Ahora vamos a dividir 10 entre cero haciendo otra sucesión de restas:

1ª resta → 10–0 = 10

2ª resta → 10–0 = 10

3ª resta → 10–0 = 10…

Como puedes ver, no tiene ningún sentido continuar, porque siempre nos da el mismo resultado.

Es decir, **podemos hacer infinitas restas** sin llegar jamás a alcanzar al número cero.[5]

Veámoslo de forma gráfica: Creamos una tabla de valores de 0 a 7 y luego saltemos a valor un millón, respecto de $\frac{1}{x}$ y de $-\frac{1}{x}$ a ver qué pasa:

[5] Quédate con éste concepto, que será muy importante para la parte de Análisis Matemático.

Valores	1/x	- 1/x
0	∞	-∞
1	1	-1
2	0,5	-0,5
3	0,3	-0,3
4	0,25	-0,25
5	0,20	-0,20
6	0,16	-0,16
7	0,14	-0,14
1.000.000	0.000001	-0.000001

2.2. Fracciones, Decimales y Porcentajes: Tres disfraces para un mismo número

Un número puede vestirse con tres trajes diferentes y seguir valiendo lo mismo:

Disfraz de Fracción	**Disfraz de Decimal**	**Disfraz de Porcentaje**	**¿Qué significa en la vida real?**
$\frac{1}{2}$	0,50	50%	La mitad exacta de algo.
$\frac{1}{4}$	0,25	25%	La cuarta parte (un cuarto).
$\frac{3}{4}$	0,75	75%	Tres cuartos.
$\frac{1}{10}$	0,10	10%	Una décima parte.

2.3. Operaciones con Fracciones

- **Suma y Resta con el mismo denominador (Fracciones hermanas):**

Dejamos el denominador igual y sumamos o restamos solo los números de arriba.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

- **Multiplicación de Fracciones (En línea recta):**

Multiplicamos el de arriba con el de arriba y el de abajo con el de abajo.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

- **División de Fracciones (Multiplicación en cruz):**

Multiplicamos en cruz como si rebotara una pelota.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Otra manera de explicarlo:

- Suma de fracciones con diferente denominador:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a*d)+(b*c)}{(b*d)}$$

- Suma/Resta de fracciones con igual denominador: Se conserva el denominador y se suman o se restan los numeradores directamente.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

- Resta de fracciones con diferente denominador: Se multiplican, en cruz, cada numerador con su denominador opuesto, y se restan entre ellos. Lo que salga se tiene que dividir por el producto de ambos denominadores.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a*d)-(b*c)}{(b*d)}$$

- Multiplicación de fracciones: Se multiplican entre sí, los numeradores y los denominadores, cada uno por su lado.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(a * c)}{(b * d)}$$

- División de fracciones con diferente denominador. Hay dos métodos:

El Cociente clásico, por el que se multiplican en cruz y luego se dividen entre sí, de esta guisa

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{(a * d)}{(b * c)}$$

O la multiplicación por la inversa de la segunda fracción, tal que así:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{(a * d)}{(b * c)}$$

2.4. La Regla de Tres (El truco de la "L")

Cuando conocemos **3 datos** y queremos descubrir un **misterio (X)**, colocamos los datos en una tabla ordenada:

a	b
X	c

- **Si es Proporcionalidad Directa (A más, más):** Si compras más caramelos, pagas más dinero.

$$X = \frac{a \cdot c}{b}$$

(Multiplicas los dos números vecinos a la X y divides entre el que está enfrente en diagonal).

- **Si es Proporcionalidad Inversa (A más, menos):** Si más amigos ayudan a pintar una pared, tardan **menos tiempo**.

Tapamos la X y multiplicamos los dos datos de arriba en línea recta, dividiendo entre el de abajo:

$$X = \frac{a \cdot b}{c}$$

Me ha sido de muchísima utilidad a lo largo de mi vida personal y profesional. Considero fundamental el dominarla a la perfección. Te voy a dar los pasos para que te salgan unas reglas de tres perfectas:

Paso 1:EL CUADRADO DE DATOS.

Denomino el cuadrado de datos a la distribución que toca hacer de los tres datos, de dos grupos diferentes, que nos aportan para poder averiguar el cuarto dato, que es la incógnita. Personalmente prefiero agrupar el cuadrado ordenando los datos por sus dos grupos, dejando siempre la X abajo y a la izquierda, tal que así.

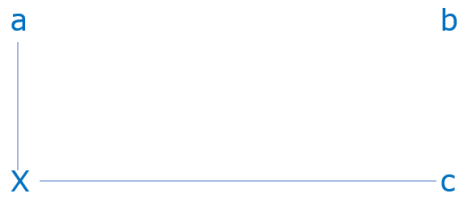
GRUPO DE DATOS 1	GRUPO DE DATOS 2
a	b
X	c

Paso 2:**Operación si la relación entre los datos es directamente proporcional = Regla de 3 directa.**

Aplicamos lo que yo llamo "La Regla de la L":

En el punto donde se une los dos palitos de la L, lo hacemos coincidir con la X, para así unir los dos datos contiguos a la X. Acto seguido, los dividiremos entre el dato más alejado de la X. Tal que así:

GRUPO DE DATOS 1 GRUPO DE DATOS 2



$$X = \frac{a*c}{b}$$

Si 10 fotocopias nos cuestan 1€, ¿Cuánto nos costarán 150 fotocopias?

GRUPO DE DATOS 1	GRUPO DE DATOS 2
Fotocopias	*Importe en €*
1	10
X	150

$$X = \frac{150 * 1}{10} = 15€$$

Como podéis ver, los grupos de datos son dos: Las fotocopias y el importe en €, así que hemos hecho dos columnas, una para cada grupo de datos.

Operación si la relación entre los datos es inversamente proporcional = Regla de 3 inversa.

Ejemplo: Tres amigas van de vacaciones a Almería y alquilan un apartamento en la playa. El alquiler les cuesta 420€ a cada una. ¿Cuánto tendrían que poner si se les añaden dos amigas más?

Es una **regla de tres inversa** porque las dos magnitudes (número de amigas y dinero a pagar por persona) se comportan de forma contraria:

A más amigas que se repartan el gasto, menos dinero tiene que pagar cada una.

1. ¿Por qué es inversa?

- En una **proporcionalidad directa**, al aumentar una magnitud, la otra también aumenta (por ejemplo: si compras más kilos de fruta, pagas más dinero).
- En una **proporcionalidad inversa**, al aumentar una magnitud, la otra disminuye en la misma proporción porque el **total es fijo**:
    - El coste total del apartamento no cambia:

$$\text{Coste total} = 3 \text{ amigas} \times 420 \text{ €} = 1260 \text{ €}$$

- Si ahora son **más personas** ($3 + 2 = 5$ amigas), ese mismo total de 1260 € se reparte entre más partes, por lo que a cada una le toca pagar **menos**.

2. Planteamiento y resolución

Datos del problema:

- **3 amigas** $\longrightarrow$ **420 €** cada una
- **5 amigas** $(3 + 2) \longrightarrow X$ **€** cada una

Resolución por regla de tres inversa:

En la proporcionalidad inversa no se multiplica en cruz (como en la directa), sino en **línea horizontal** (el producto de las dos magnitudes permanece constante):

$$3 \times 420 = 5 \times X$$

Despejamos X:

$$X = \frac{3 \times 420}{5} = \frac{1260}{5} = \mathbf{252\ €}$$

Conclusión

Si se suman dos amigas más (siendo 5 en total), cada una tendrá que poner **252 €**.

Vía rápida, sin cambios: ”No invertir los datos, Tapar la X con el dedo, poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo y operar como si fuera un quebrado gigante”:

Es la vía más sencilla de todas y la que yo recomiendo, ya que no tenemos que preocuparnos de recordar que hemos de invertir las posiciones de x y a. La cosa queda así.

Primera maniobra: Tapar la X con el dedo. Aquí lo simbolizaremos poniendo este punto

Segunda maniobra: Poner una línea gigante que separe los datos de arriba de los de abajo.

Tercera maniobra: Operar como si fuera un quebrado gigante, es decir, multiplicamos entre sí los datos de arriba y dividimos entre el dato de abajo. La cosa quedaría así:

a b

$$X = \frac{a*b}{c}$$

X c

Aplicando esto al problema de las amigas, tenemos que:

€ amigas

420 3

5

$$X = \frac{420*3}{5} = 252€$$

Como podéis ver, el resultado es el mismo y nos ahorramos el peligro de olvidarnos de cambiar la X de sitio, un error que nos dará un resultado equivocado.

USA TU CEREBRO A LA ANTIGUA USANZA: Cómo calcular porcentajes rápidamente sin usar calculadora.

Imagina que te dán un folio A4, un bolígrafo y te piden que, con sólo esas herramientas, obtengas el 12% de 1500. Y encima, te dán apenas un minuto de tiempo para que respondas…

Antes que te dé un patatús te voy a enseñar la herramienta mental que hago servir yo, para hacer estos cálculos rápidamente.

Paso uno: Asumiendo que la cifra dada es el 100% de esa cifra (el 100% de 1500 es el própio 1500), obtengo primero el 10%, que es 150, puesto que sólo tengo que quitarle un cero por la derecha 1500.

Paso dos: Obtengo el 1% quitándole al 10% otro cero por la derecha 150 y me queda 15. También puedo coger el 1500 original y quitarle dos ceros de golpe, con lo que llego al mismo resultado, es decir 15.

Paso tres: Voy sumando esos resultados hasta obtener el porcentaje que me han pedido

¿Qué me han pedido? El 12% de 1500	
10% de 1500	150
1% de 1500	15
1% de 1500	15
TOTAL	180

Y ahora es cuando mi querida amiga Maria Primitiva me dice: *"A ver, Genio de la lámpara maravillosa, ese ejemplo es muy sencillo porque has tomado un número con ceros… Pero si te pido el 35% de 2355 ¿Cómo me lo resuelves?".*

Pues igual, pero en vez de ir quitando ceros, porque no los tengo, lo que hago es mover la coma de derecha a izquierda, un salto para obtener el 10% y dos saltos para el 1%, tal que así:

Si el 100% de 2355 es 2355, el 10% será 235,5 y el 1% será 23,55.

Como me piden el 35% de 2355 será cuestión de multiplicar el 10% por 3, el 1% por 5 y sumar ambas cifras:

235,5 x 3 (para obtener el 30%) + 23,55 x 5 (para obtener el 5%) y el resultado es **706,50 + 117,75 = 824,25.**

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 2.1

Calcula la siguiente suma y resta combinada de fracciones:

$$E = \frac{7}{5} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el denominador.**

Todas las fracciones tienen abajo el número 5.

💡 **Inciso pedagógico (Fracciones homogéneas):** Como los trozos de la tarta son del mismo tamaño (quintos), no hace falta transformar nada. Simplemente mantenemos el 5 abajo y juntamos los números de arriba.

- **Paso 2: Operar los numeradores.**

$$E = \frac{7 + 2 - 4}{5}$$

  - $7 + 2 = 9$
  - $9 - 4 = 5$

- **Paso 3: Simplificar el resultado.**

$$E = \frac{5}{5} = 1$$

💡 **Inciso pedagógico (Fracción igual a la unidad):** $\frac{5}{5}$ significa que teníamos una pizza partida en 5 trozos y nos hemos comido los 5. Por tanto, nos comimos 1 pizza entera.

- **Resultado final:** 1

Ejercicio Resuelto 2.2

Problema de la vida real (Regla de tres directa):

En una tienda, 3 paquetes de cromos cuestan 6 €. ¿Cuánto costarán 8 paquetes de cromos?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el tipo de problema.**

A más paquetes de cromos, más dinero costarán. Es una **proporción directa**.

- **Paso 2: Construir el cuadro de datos.**

Paquetes	Precio (€)
3	6
8	X

- **Paso 3: Aplicar el truco de la "L" (multiplicación cruzada y división).**

💡 **Inciso pedagógico (Despeje de la incógnita):** Multiplicamos los datos que están cruzados (8 y 6) y dividimos entre el dato que queda emparejado con la X (3).

$$X = \frac{8 \cdot 6}{3}$$

- **Paso 4: Resolver las operaciones.**
  - $8 \cdot 6 = 48$
  - $48 \div 3 = 16$
- **Resultado final:** 16 €

Ejercicio Resuelto 2.3

Problema de reparto (Regla de tres inversa):

2 robots tardan 6 horas en construir un juguete. Si ponemos a trabajar a 4 robots con la misma velocidad, ¿cuántas horas tardarán en construir el mismo juguete?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el tipo de problema.**

Si tenemos **más robots trabajando**, tardarán **menos tiempo** en terminar. Es una **proporción inversa**.

- **Paso 2: Construir el cuadro de datos.**

Robots	Horas
2	6
4	X

- **Paso 3: Aplicar el método de la línea recta para proporción inversa.**

💡 **Inciso pedagógico (Vía rápida sin invertir datos):** En proporcionalidad inversa, el producto de los datos iniciales se mantiene constante. Multiplicamos en horizontal la fila de arriba ($2 \cdot 6$) y dividimos entre el número de la fila de abajo (4).

$$X = \frac{2 \cdot 6}{4}$$

- **Paso 4: Resolver las operaciones.**
  - $2 \cdot 6 = 12$
  - $12 \div 4 = 3$
- **Resultado final:** 3 horas

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 2.1:** Calcula la siguiente multiplicación y división de fracciones:

$$A = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) \div \frac{1}{2}$$

(Solución indicada: 3*)*

2. **Propuesto 2.2:** Un coche gasta 5 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos litros gastará en un viaje de 400 km?

(Solución indicada: 20 litros*)*

3. **Propuesto 2.3:** Si 3 amigos tardan 20 minutos en ordenar una habitación de juegos, ¿cuántos minutos tardarían si ayudan 6 amigos en total?

(Solución indicada: 10 minutos*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 2.1

- **Enunciado:** $A = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right) \div \frac{1}{2}$
- **Desarrollo:**
  1. *Multiplicación dentro del paréntesis (en línea recta):*

$$\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = \frac{18}{12}$$

  2. *Simplificación de la fracción:* Dividimos numerador y denominador entre 6:

$$\frac{18 \div 6}{12 \div 6} = \frac{3}{2}$$

  3. *División de fracciones (multiplicar por la inversa o en cruz):*

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2}$$

  4. *Resultado exacto:* $\frac{6}{2} = 3$.

- **Resultado:** 3

Solución del Propuesto 2.2

- **Enunciado:** 5 litros para 100 km. Litros para 400 km.
- **Desarrollo:**
  1. *Planteamiento:* Proporcionalidad directa (a más kilómetros, más litros).

Litros	Kilómetros
5	100
X	400

  2. *Operación en "L":*

$$X = \frac{5 \cdot 400}{100}$$

  3. *Cálculo:* $5 \cdot 400 = 2000 \Longrightarrow \frac{2000}{100} = 20.$

- **Resultado:** 20 litros

Solución del Propuesto 2.3

- **Enunciado:** 3 amigos tardan 20 minutos. Tiempo para 6 amigos.
- **Desarrollo:**
  1. *Planteamiento:* Proporcionalidad inversa (más amigos tardan menos tiempo).

Amigos	Minutos
3	20
6	X

  2. *Operación:* Multiplicamos la fila superior y dividimos entre el dato inferior.

$$X = \frac{3 \cdot 20}{6}$$

  3. *Cálculo:* $3 \cdot 20 = 60 \Longrightarrow \frac{60}{6} = 10.$

- **Resultado:** 10 minutos

📘 TEMA 3: EL MUNDO DEL ÁLGEBRA Y EL DETECTIVE DE LA X

3.1. ¿Qué es el Álgebra? Jugar a los detectives

En matemáticas normales sumamos números conocidos como $2 + 3 = 5$. Pero en el Álgebra jugamos a los detectives: hay un número secreto que se ha escondido detrás de una letra, casi siempre la letra X.

A esa letra misteriosa la llamamos **Incógnita** o **Variable**:

- Si decimos $X + 2 = 5$, nos estamos preguntando: *«¿Qué número escondido, al sumarle 2, nos da 5?»*
- Como $3 + 2 = 5$, ¡el detective ha descubierto que $X = 3$!

3.2. El diccionario Secreto: Del lenguaje normal al lenguaje matemático

Para resolver misterios, primero debemos traducir las palabras a números y letras:

- **Un número cualquiera:** X
- **El doble de un número:** $2X$ (es decir, $2 \cdot X$ o $X + X$)
- **El triple de un número:** $3X$
- **El número siguiente (posterior):** $X + 1$
- **El número anterior:** $X - 1$
- **La mitad de un número:** $\frac{X}{2}$

3.3. La Balanza Mágica (Ecuaciones de 1.º Grado)

Una ecuación es como una **balanza de dos platos en perfecto equilibrio**:

$$\text{Plato Izquierdo} = \text{Plato Derecho}$$

Si queremos dejar a la X sola para descubrir su valor, debemos mover los números al otro plato, pero **cambiando a su operación contraria**:

- Lo que está **sumando (+)** pasa al otro lado **restando (-)**.
- Lo que está **restando (-)** pasa al otro lado **sumando (+)**.
- Lo que está **multiplicando (·)** pasa al otro lado **dividiendo (/)**.
- Lo que está **dividiendo (/)** pasa al otro lado **multiplicando (·)**.

⚠️ **¡Cuidado con el error típico!** Cuando un número pasa de multiplicar a dividir, se lleva su signo consigo: si era -3, pasa dividiendo como -3. No le cambies el signo positivo/negativo, solo cambia la acción de multiplicar a dividir.

3.4. Las Fórmulas Mágicas: Identidades Notables

Son atajos para no tener que multiplicar paréntesis largos uno por uno:

1. **Cuadrado de una suma:** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. **Cuadrado de una resta:** $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. **Suma por diferencia:** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 3.1

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado:

$$3X + 4 = 19$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Mover los números sueltos (sin letra) al lado derecho.** El número $+4$ está sumando junto a la X. Lo pasamos al otro lado del signo $=$ restando:

$$3X = 19 - 4$$

- **Paso 2: Calcular la resta.**

$$19 - 4 = 15$$

La ecuación queda:

$$3X = 15$$

- **Paso 3: Liberar a la X del número que la acompaña.** El 3 está pegado a la X, lo que significa que la está multiplicando. Pasa al lado derecho dividiendo:

$$X = \frac{15}{3}$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprobar la división):** Dividir 15 entre 3 significa buscar un número que multiplicado por 3 nos dé 15. Ese número es el 5.

- **Paso 4: Comprobación (Método de seguridad).**

Sustituimos la X por 5 en la balanza inicial:

$$3 \cdot 5 + 4 = 15 + 4 = 19$$

¡La balanza está equilibrada!

- **Resultado final:** $X = 5$

Ejercicio Resuelto 3.2

Problema de detective (Ecuación con enunciado):

En una granja, el número de gallinas es el triple que el de cerdos. Si entre los dos animales suman 24, ¿cuántos cerdos y cuántas gallinas hay?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Asignar las incógnitas con el diccionario matemático.
  - Cerdos $= X$
  - Gallinas $= 3X$ (el triple de cerdos)
- Paso 2: Escribir la ecuación sumando ambos grupos.

$$\text{Cerdos} + \text{Gallinas} = 24$$

$$X + 3X = 24$$

- **Paso 3: Juntar las letras iguales (términos semejantes).**

💡 **Inciso pedagógico (Sumar términos con letras):** 1 cerdo (X) más 3 cerdos $(3X)$ son 4 cerdos $(4X)$ en total.

$$4X = 24$$

- **Paso 4: Despejar la X.** El 4 pasa dividiendo al 24:

$$X = \frac{24}{4} = 6$$

- **Paso 5: Responder a todas las preguntas del problema.**
  - Cerdos: $X = 6$
  - Gallinas: $3X = 3 \cdot 6 = 18$
- **Resultado final:** 6 cerdos y 18 gallinas

Ejercicio Resuelto 3.3

Aplica la fórmula mágica del cuadrado de una suma:

$$(X+3)^2$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar las partes de la fórmula. La fórmula es $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
  - La primera pieza (a) es X.
  - La segunda pieza (b) es 3.
- Paso 2: Aplicar la receta paso a paso.
  1. *El cuadrado de la primera pieza:* X^2
  2. *El doble de la primera por la segunda:* $2 \cdot X \cdot 3 = 6X$
  3. *El cuadrado de la segunda pieza:* $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- **Paso 3: Juntar los tres ingredientes.**

$$(X+3)^2 = X^2 + 6X + 9$$

- **Resultado final:** $X^2 + 6X + 9$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 3.1:** Resuelve la siguiente ecuación de primer grado:

$$5X - 7 = 2X + 8$$

(Solución indicada: $X = 5$)

2. **Propuesto 3.2:** La suma de dos números consecutivos es igual a 31. ¿Cuáles son esos dos números?

(Solución indicada: 15 y 16)

3. **Propuesto 3.3:** Desarrolla usando identidades notables:

$$(2X-1)^2$$

(Solución indicada: $4X^2 - 4X + 1$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 3.1

- **Enunciado:** $5X - 7 = 2X + 8$
- **Desarrollo:**
  1. *Agrupamos las X a la izquierda:* Pasamos $+2X$ restando: $5X - 2X - 7 = 8$.
  2. *Agrupamos los números a la derecha:* Pasamos -7 sumando: $5X - 2X = 8 + 7$.
  3. *Operamos cada lado:*
     - $5X - 2X = 3X$
     - $8 + 7 = 15$
     - Obtenemos: $3X = 15$.
  4. *Despejamos:* $X = \frac{15}{3} = 5$.
- **Resultado:** $X = 5$

Solución del Propuesto 3.2

- **Enunciado:** Suma de dos números consecutivos igual a 31.
- **Desarrollo:**
  1. *Traducción:* Primer número $= X$; Número consecutivo $= X + 1$.
  2. *Ecuación:* $X + (X + 1) = 31$.
  3. *Simplificamos:* $2X + 1 = 31$.
  4. *Despejamos:* $2X = 31 - 1 \Longrightarrow 2X = 30 \Longrightarrow X = \frac{30}{2} = 15$.
  5. *Los números son:* $X = 15$ y su siguiente $X + 1 = 16$.
- **Resultado:** 15 y 16

Solución del Propuesto 3.3

- **Enunciado:** $(2X - 1)^2$
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
  2. *Primera pieza al cuadrado:* $(2X)^2 = 2^2 \cdot X^2 = 4X^2$.
  3. *Doble producto:* $-2 \cdot (2X) \cdot 1 = -4X$.

4. *Segunda pieza al cuadrado:* $1^2 = 1$.
5. *Juntamos todo:* $4X^2 - 4X + 1$.

- **Resultado:** $4X^2 - 4X + 1$

📘 TEMA 4: LA BRÚJULA DEL ESPACIO: GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

4.1. El Plano Cartesiano: El mapa del tesoro

Imagina una cuadrícula para jugar a los barquitos o al mapa del tesoro:

- **El Eje Horizontal (X):** La línea del suelo. Hacia la derecha das pasos hacia adelante ($+$) y hacia la izquierda das pasos hacia atrás ($-$).
- **El Eje Vertical (Y):** La escalera. Hacia arriba subes ($+$) y hacia abajo bajas ($-$).

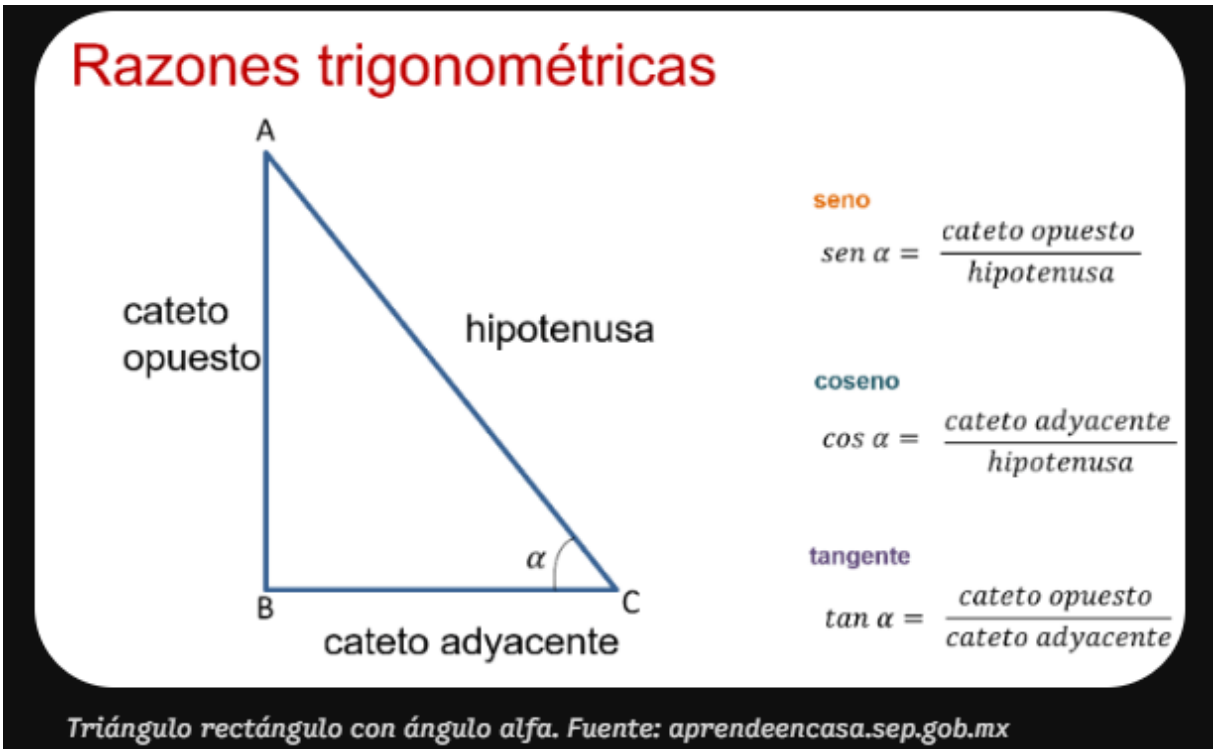
Cada punto se escribe como una pareja de números entre paréntesis (X, Y):

- El punto $(3,2)$ significa: «Avanza 3 pasos a la derecha y sube 2 escalones».
- El punto $(0,0)$ es el centro de todo, el **Origen**.

4.2. El Gran Secreto de Pitágoras: El Triángulo Rectángulo

Un triángulo rectángulo tiene una esquina recta perfecta como la de un libro o una ventana ($90°$).

- Los dos lados que forman la esquina recta se llaman **Catetos** (a y b).
- El lado más largo e inclinado se llama **Hipotenusa** (h).



Triángulo rectángulo con ángulo alfa. Fuente: aprendeencasa.sep.gob.mx

Identificación con el ángulo α:

- **Hipotenusa:** Es el lado más largo del triángulo y se encuentra siempre enfrente del ángulo recto de $90°$ (en el vértice B).
- **Cateto Opuesto:** Es el lado situado **justo enfrente** del ángulo α (el segmento vertical AB).
- **Cateto Adyacente:** Es el lado que está **pegado** al ángulo α (el segmento horizontal BC).

Fórmulas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$$

👑 **Teorema de Pitágoras:**

Si construyes un cuadrado sobre cada lado del triángulo, el área del cuadrado grande sobre la rampa es exactamente igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños:

$$h^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4.3. Las Tres Flechas Mágicas de la Trigonometría

La palabra trigonometría viene del griego y significa «medir triángulos». Conociendo un ángulo (α), podemos averiguar distancias lejanas usando tres razones fundamentales:

1. **Seno (sen):** Relaciona el cateto que está enfrente (opuesto) con la rampa (hipotenusa).

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

2. **Coseno ($\cos$):** Relaciona el cateto de la base (contiguo/adyacente) con la rampa (hipotenusa).

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Hipotenusa}}$$

3. **Tangente ($\tan$):** Relaciona el lado de enfrente con el lado del suelo.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Contiguo}}$$

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 4.1

Calcula la longitud de la rampa (hipotenusa) de un tobogán que mide 4 metros **de altura (cateto** a**) y su base en el suelo mide** 3 metros **de largo (cateto** b**).**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar los datos y la fórmula.**
    - Altura $(a) = 4$ m
    - Base $(b) = 3$ m
    - Hipotenusa $(h) =$?

Aplicamos el Teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$.

- **Paso 2: Sustituir los números en la fórmula.**

$$h^2 = 4^2 + 3^2$$

- **Paso 3: Calcular las potencias.**

💡 **Inciso pedagógico (Cuadrados de números):** $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ y $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

$$h^2 = 16 + 9$$

$$h^2 = 25$$

- **Paso 4: Hallar la raíz cuadrada para despejar la h.**

💡 **Inciso pedagógico (Operación inversa a la potencia):** Para quitar el exponente 2 de la h, aplicamos la raíz cuadrada en el otro lado. Buscamos un número que multiplicado por sí mismo dé 25: ese número es 5 porque $5 \cdot 5 = 25$.

$$h = \sqrt{25} = 5$$

- **Resultado final:** $h = 5$ metros

Ejercicio Resuelto 4.2

Un capitán de barco apunta con un telémetro láser hacia la punta de un faro. La distancia por el aire en línea recta (hipotenusa) hasta la punta del faro es de 100 metros **y el ángulo de elevación es de** $30°$**. Sabiendo que** $\text{sen}(30°) = 0{,}5$**, ¿cuál es la altura del faro?**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Reconocer la razón trigonométrica adecuada.**

Queremos saber la altura (cateto opuesto, X) y conocemos la rampa ($h = 100$ m) y el ángulo.

Usamos la fórmula del Seno:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

- **Paso 2: Sustituir los datos del problema.**

$$\text{sen}(30°) = \frac{X}{100}$$

$$0{,}5 = \frac{X}{100}$$

- **Paso 3: Despejar la incógnita X.**

💡 **Inciso pedagógico (Despejar divisiones en ecuaciones):** El número 100 está dividiendo en la parte de abajo; pasa al otro lado del igual multiplicando.

$$X = 0{,}5 \cdot 100$$

- **Paso 4: Multiplicar decimales por potencias de 10.**

💡 **Inciso pedagógico (Multiplicar por 100):** Para multiplicar un número decimal por 100, movemos la coma dos lugares hacia la derecha: $0{,}5 \rightarrow 5{,}0 \rightarrow 50$.

$$X = 50$$

- **Resultado final: La altura del faro es de 50 metros.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 4.1:** En un triángulo rectángulo, los dos catetos miden 6 cm y 8 cm. ¿Cuánto mide su hipotenusa?

(Solución indicada: 10 cm*)*

2. **Propuesto 4.2:** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y uno de sus catetos mide 5 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

(Solución indicada: 12 cm*)*

3. **Propuesto 4.3:** Queremos calcular la distancia por el suelo (cateto contiguo) desde la base de una torre hasta una persona. La distancia en línea recta desde la cima hasta la persona es de 200 m y el $\cos(60°) = 0{,}5$. ¿A qué distancia del pie de la torre está la persona?

(Solución indicada: 100 metros*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 4.1

- **Enunciado:** Catetos $a = 6$, $b = 8$. Hallar h.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula de Pitágoras:* $h = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  2. *Elevamos al cuadrado:* $6^2 = 36$ y $8^2 = 64$.
  3. *Sumamos las áreas:* $36 + 64 = 100$.
  4. *Raíz cuadrada:* $\sqrt{100} = 10$ (ya que $10 \cdot 10 = 100$).
- **Resultado:** 10 cm

Solución del Propuesto 4.2

- **Enunciado:** Hipotenusa $h = 13$, cateto $a = 5$. Hallar cateto b.
- **Desarrollo:**
  1. *Despeje del cateto en Pitágoras:* Si $h^2 = a^2 + b^2$, entonces $b^2 = h^2 - a^2$.
  2. *Calculamos cuadrados:* $13^2 = 169$ y $5^2 = 25$.
  3. *Restamos:* $b^2 = 169 - 25 = 144$.
  4. *Raíz cuadrada:* $b = \sqrt{144} = 12$ (ya que $12 \cdot 12 = 144$).
- **Resultado:** 12 cm

Solución del Propuesto 4.3

- **Enunciado:** Hipotenusa $= 200$ m, $\cos(60°) = 0{,}5$. Hallar cateto contiguo (C_c).
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula del Coseno:* $\cos(60°) = \frac{C_c}{h}$.
  2. *Sustitución:* $0{,}5 = \frac{C_c}{200}$.
  3. *Despeje:* $C_c = 0{,}5 \cdot 200 = 100$.
- **Resultado:** 100 metros

NOCIONES BÀSICAS DE GEOMETRÍA DEL PLANO.

GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y TRIGONOMETRÍA.

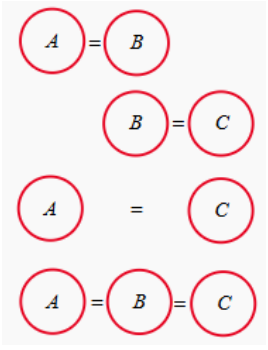
La geometría euclídea es la parte de la geometría que estudia los objetos o figuras y sus relaciones en un espacio donde se cumplen los cinco postulados de Euclides y las cinco nociones comunes. Estos postulados y nociones comunes fueron recogidas en un tratado de geometría escrito por Euclides de Alejandría, hacia el año 300 antes de Cristo, que constaba de trece libros y que se decía los Elementos.

Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

1. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Si una recta corta a otras dos formando, a un mismo lado de la secante, dos ángulos internos agudos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están dichos ángulos

Las cinco nociones comunes son:

1. Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre sí.(la propiedad transitiva de una relación euclidiana).



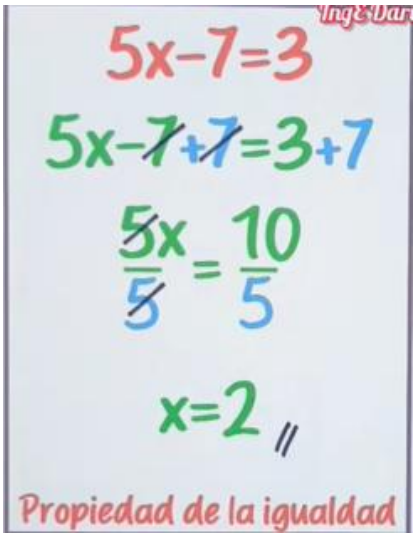
2. Si a cosas iguales añadimos cosas iguales, las totales son iguales.(La propiedad de la suma de la igualdad).

Para todo número a, b, c:

Si a = b, entonces, a + **c** = b + **c**

Esta propiedad asegura que en una igualdad al sumar una misma cantidad en ambos lados, se obtiene el mismo resultado.

Piensa que el método de la igualdad en la resolución de las ecuaciones se basa en esta noción Euclideana. Como ves, en matemáticas todas las partes están ligadas y conectadas entre ellas.



3. Si a cosas iguales quitamos cosas iguales, los restos son iguales.(Propiedad de igualdad de la resta).

Dice que en una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales en ambos miembros y la igualdad no se altera.

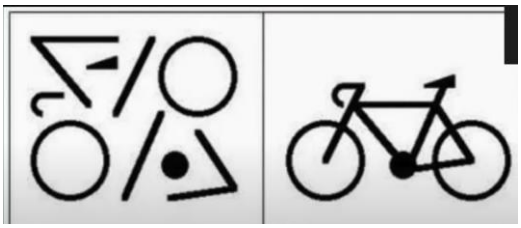
*Ejemplos:

*Si (2 x 6) - 4 = 12 - 4, entonces 2 x 6 = 12

*Si a + b = c + b, entonces a = c

*Si (8 / 4) (5) = (2) (5), entonces 8 /4 = 2

4. Las cosas que se superponen son iguales.(propiedad reflexiva) → Para cada número real x , tenemos que x = x, o sea que ese número real es igual a sí mismo.

5. El todo es mayor que la parte. 

   La bicicleta entera es mayor que cada una de las 9 partes que la componen.

3.3. Igualdades notables

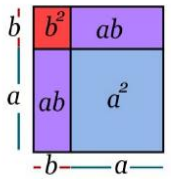
En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en algún caso particular, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

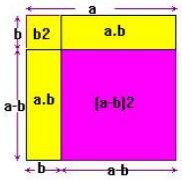
Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

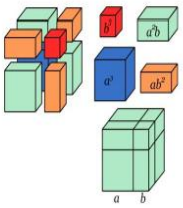


$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Observa la figura y conéctala con la igualdad.





- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

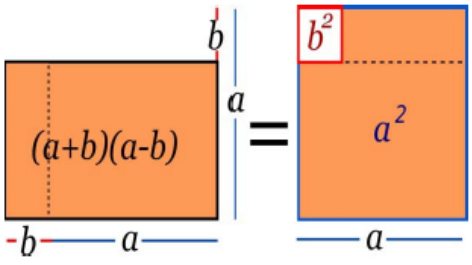
- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  - $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

IGUALDADES NOTABLES

$$(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

$$(a-b)\cdot(a-b)=(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Las igualdades notables son importantes porque van a aparecer, de una manera u otra, el resto de la vida que demos matemáticas.

Olvidarse de ellas supone cometer errores garrafales, que mandan a hacer puñetas los ejercicios.

Así que haz un esfuerzo de memorización o mejor aún recuerda las demostraciones gráficas de los cuadrados.

Aquí os dejo una interesantísima tabla para que veáis diferentes combinaciones de estas identidades notables:

$(x+1)^2$	x^2+2x+1	$(x+1)(x-1)$	x^2-1
$(x+2)^2$	x^2+4x+4	$(x+2)(x-2)$	x^2-4
$(x+3)^2$	x^2+6x+9	$(x+3)(x-3)$	x^2-9
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x+4)(x-4)$	x^2-16
$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$	$(x+5)(x-5)$	x^2-25
$(x+6)^2$	$x^2+12x+36$	$(x+6)(x-6)$	x^2-36
$(x-1)^2$	x^2-2x+1	$-(x-2)^2$	$-x^2+4x-4$
$(x-2)^2$	x^2-4x+4	$-(x-3)^2$	$-x^2+6x-9$
$(x-3)^2$	x^2-6x+9	$-(x+1)(x-1)$	$-x^2+1$
$(x-4)^2$	$x^2-8x+16$	$-(x+2)(x-2)$	$-x^2+4$
$(x-5)^2$	$x^2-10x+25$	$-(x+3)(x-3)$	$-x^2+9$
$(x-6)^2$	$x^2-12x+36$	*Inicio*	*Final*

📘 TEMA 5: LA MÁQUINA DEL TIEMPO Y LA VELOCIDAD: INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS

5.1. ¿Qué es una función? La fábrica mágica

Una función es como una **máquina de transformar cosas**:

- Tú le metes un número por la entrada (la variable independiente, x).
- La máquina hace una operación matemática dentro.
- Sale un resultado nuevo por la salida (la variable dependiente, y o $f(x)$).

Por ejemplo, si la máquina tiene la regla $y = 2x$ (el doble):

- Si metes un 3, la máquina calcula $2 \cdot 3$ y saca un 6.

- Si metes un 5, la máquina calcula $2 \cdot 5$ y saca un 10.

5.2. ¿Qué es una Derivada? El velocímetro del coche

Imagina que vas en un coche. Si miras por la ventana, ves cuántos kilómetros has recorrido en total. Pero si miras el **velocímetro**, ves **a qué velocidad vas en ese segundo exacto**.

🚗 **La Derivada es el velocímetro:**

Nos dice a qué ritmo o velocidad está cambiando una función en un punto concreto.

En una montaña rusa o en una curva, la derivada nos dice si la pista sube, baja o está plana (la inclinación o pendiente).

5.3. El Truco del Poder (Regla de la Potencia)

Para derivar una potencia, seguimos dos pasos muy divertidos:

1. **El exponente baja a jugar al suelo:** Pasa a multiplicar a la letra por delante.
2. **El exponente pierde una estrella:** Al número de arriba le restamos 1.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

- **Si la x está sola (x^1):** Al derivarla se convierte en 1.
- **Si hay un número solo (una constante sin x, como el 5):** Al derivarlo se convierte en 0 (porque los números fijos no cambian de velocidad).

5.4. La Derivada con Amigos (Reglas Básicas)

- **Si la x tiene un número delante:** El exponente baja y se multiplica con ese número.

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 4 \cdot 3x^{4-1} = 12x^3$$

- **Regla de la Cadena (Las cajas sorpresa):** Si tenemos una función grande dentro de un paréntesis elevada a una potencia, derivamos la caja grande por fuera y luego multiplicamos por la derivada de lo que hay dentro.

$$\frac{d}{dx}[u(x)]^n = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 5.1

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 9$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Derivar el primer término ($5x^3$).**
  - El exponente 3 baja a multiplicar al 5: $3 \cdot 5 = 15$.
  - Le restamos 1 al exponente: $3 - 1 = 2$.
  - Nos queda: $15x^2$.

💡 **Inciso pedagógico (Regla de la potencia con coeficiente):** Cuando una letra lleva un número delante, el número de arriba baja multiplicando al compañero de abajo: $n \cdot a \cdot x^{n-1}$.

- **Paso 2: Derivar el segundo término ($-4x^2$).**
  - El exponente 2 baja a multiplicar al -4: $2 \cdot (-4) = -8$.
  - Le restamos 1 al exponente: $2 - 1 = 1$.
  - Nos queda: $-8x^1 = -8x$.
- **Paso 3: Derivar el tercer término ($+7x$).**
  - La x está elevada a 1. Al derivar x, queda 1.
  - $7 \cdot 1 = 7$.

💡 **Inciso pedagógico (Derivada de una recta):** La derivada de cualquier número pegado a la x sin exponente es simplemente el número.

- **Paso 4: Derivar el número suelto (-9).**
  - Como el -9 es un número fijo sin letras (una constante), su derivada es 0.
- **Paso 5: Juntar todos los resultados.**

$$f'(x) = 15x^2 - 8x + 7$$

- **Resultado final:** $f'(x) = 15x^2 - 8x + 7$

Ejercicio Resuelto 5.2

Calcula la derivada usando la regla de la cadena:

$$y = (2x + 3)^4$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar la caja de fuera y la pieza de dentro.
  - La caja de fuera es elevar a la cuarta potencia: $(\dots)^4$.
  - La pieza de dentro (u) es $2x + 3$.
- Paso 2: Derivar la caja de fuera manteniendo lo de dentro quieto.
  - El 4 baja por delante y el exponente pasa a ser 3:

$$4(2x + 3)^3$$

- Paso 3: Calcular la derivada de la pieza de dentro.
  - Derivada de $2x + 3$:
    - Derivada de $2x$ es 2.
    - Derivada de 3 es 0.
    - La derivada interior es 2.
- Paso 4: Multiplicar la derivada de fuera por la derivada de dentro.

$$y' = 4(2x + 3)^3 \cdot 2$$

💡 **Inciso pedagógico (Regla de la Cadena):** Imagina que tienes una muñeca rusa (matrioshka). Primero abres la muñeca de fuera dejando la pequeña dentro, y luego multiplicas por la muñeca pequeña.

- **Paso 5: Simplificar multiplicando los números sueltos.**
  - Multiplicamos el 4 de delante por el 2 del final: $4 \cdot 2 = 8$.

$$y' = 8(2x + 3)^3$$

- **Resultado final:** $y' = 8(2x + 3)^3$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 5.1:** Halla la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x - 12$$

(Solución indicada: $f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 3$)

2. **Propuesto 5.2:** Deriva la siguiente función con potencias fraccionarias:

$$g(x) = x^3 + x^{1/2}$$

(Solución indicada: $g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$*)*

3. **Propuesto 5.3:** Aplica la regla de la cadena para derivar:

$$y = (5x - 2)^3$$

(Solución indicada: $y' = 15(5x - 2)^2$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 5.1

- **Enunciado:** $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x - 12$
- **Desarrollo:**
  1. *Término* $2x^4$*:* $4 \cdot 2x^{4-1} = 8x^3$.
  2. *Término* $-6x^3$*:* $3 \cdot (-6)x^{3-1} = -18x^2$.
  3. *Término* $+3x$*:* La derivada de $3x$ es 3.
  4. *Constante* -12*:* La derivada de una constante es 0.
  5. *Juntamos todo:* $f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 3$.
- **Resultado:** $f'(x) = 8x^3 - 18x^2 + 3$

Solución del Propuesto 5.2

- **Enunciado:** $g(x) = x^3 + x^{1/2}$
- **Desarrollo:**
  1. *Término* x^3*:* $3x^{3-1} = 3x^2$.
  2. *Término* $x^{1/2}$*:*
     - Bajamos el exponente: $\frac{1}{2}x^{1/2-1}$.
     - Hacemos la resta de fracciones: $\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$.
     - Queda $\frac{1}{2}x^{-1/2}$.
  3. *Convertir exponente negativo en raíz:*
     - $x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
     - Multiplicando por $\frac{1}{2}$ queda $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
  4. *Resultado completo:* $g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- **Resultado:** $g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Solución del Propuesto 5.3

- **Enunciado:** $y = (5x - 2)^3$
- **Desarrollo:**
  1. *Derivada exterior:* $3(5x - 2)^{3-1} = 3(5x - 2)^2$.
  2. *Derivada interior:* La derivada de $(5x - 2)$ es 5.
  3. *Regla de la cadena:* Multiplicamos exterior por interior:

$$y' = 3(5x - 2)^2 \cdot 5 = 15(5x - 2)^2$$

- **Resultado:** $y' = 15(5x - 2)^2$

📘 TEMA 6: EL RECOLECTOR DE ÁREAS Y LA MÁQUINA INVERSA: INTRODUCCIÓN A LAS INTEGRALES

6.1. La Foto en el Espejo: Derivar vs. Integrar

En el tema anterior aprendimos que derivar es como mirar el velocímetro de un coche en marcha.

¿Qué pasa si queremos hacer el viaje al revés?

- Si conocemos la **velocidad**, la **Integral** nos dice cuánta **distancia** hemos recorrido en total.

- Por eso a la integral también se la conoce como **Antiderivada**: es la operación contraria y el espejo de la derivada.

En la Derivada (Bajar de nivel)	**En la Integral (Subir de nivel)**
El exponente **baja** a multiplicar.	El exponente **sube** un escalón $(+1)$.
El exponente **pierde** 1 grado (se resta 1).	Se divide todo entre el **nuevo exponente**.

6.2. ¿Para qué sirve una Integral? Medir piscinas con curvas

Calcular el área de un cuadrado o un rectángulo es muy fácil: solo multiplicamos base por altura.

Pero, ¿qué pasa si queremos calcular el área debajo de una colina curva o el agua que cabe en una piscina con forma de guitarra eléctrica?

- No podemos usar una regla recta.

- La **Integral** corta esa figura en millones de tiritas rectangulares súper finas y las suma todas.

- Por eso su símbolo es una S **alargada**: $\int$, que significa «*Suma infinita*».

6.3. La Regla de la Antiderivada y el Misterio de la $+C$

Para integrar una potencia básica de x, usamos la siguiente fórmula mágica:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

🕵️ ¿Por qué ponemos siempre $+C$al final de una integral indefinida?

Recuerda que al derivar cualquier número suelto (como $+5$, -20o $+100$), su derivada se convierte en 0.

Cuando hacemos el camino inverso integrando, no sabemos qué número estaba ahí originalmente, así que dejamos una letra C(que llamamos **Constante de Integración**) para representar a ese número misterioso.

6.4. La Regla de Barrow (Medir áreas exactas con la Integral Definida)

Cuando queremos calcular el área encerrada entre dos puntos del suelo, digamos desde $x = a$hasta $x = b$, usamos la **Integral Definida**:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Hallamos la función primitiva $F(x)$integrando normal.

2. Cambiamos la $x$por el número de arriba (b) y calculamos el valor.

3. Cambiamos la $x$por el número de abajo (a) y calculamos el valor.

4. **Restamos:** resultado de arriba menos resultado de abajo. *(¡En este caso ya no hace falta poner la $+C$ porque da un número exacto!)*

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 6.1

Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (3x^2 + 4x + 5)\ dx$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Integrar el primer término ($3x^2$).**
  - Dejamos el número 3quieto.
  - Al exponente 2le sumamos 1: $2 + 1 = 3$.

- Dividimos entre el nuevo exponente (3):

$$3 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{3}{3}x^3 = 1x^3 = x^3$$

- 💡 **Inciso pedagógico (Comprobación en el espejo):** Si derivas x^3, el 3baja y queda $3x^2$. ¡Volvemos a tener la pieza inicial, así que está perfecto!
- **Paso 2: Integrar el segundo término ($4x$).**
  - La $x$tiene exponente invisible $1(x^1)$.
  - Le sumamos 1: $1 + 1 = 2$.
  - Dividimos entre 2:

$$4 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2$$

- **Paso 3: Integrar el número suelto (5).**
  - A un número solo, la integral le regala una x:

$$\int 5 \, dx = 5x$$

- 💡 **Inciso pedagógico (De dónde sale la x):** Recuerda que al derivar $5x$, la x desaparece y queda solo el 5. Por tanto, al integrar 5, recuperamos su letra x.

- **Paso 4: Añadir la constante mágica $+C$.**
  - Juntamos todos los trozos y agregamos $+C$ al final:

$$x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

- **Resultado final:** $x^3 + 2x^2 + 5x + C$

Ejercicio Resuelto 6.2

Calcula el área exacta bajo la curva resolviendo la siguiente integral definida (Regla de Barrow):

$$\int_0^3 2\,x\,dx$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Encontrar la función primitiva $F(x)$.** Integramos $2x$:

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = 2 \cdot \frac{x^2}{2} = x^2$$

La primitiva es $F(x) = x^2$.

- **Paso 2: Evaluar en el límite superior ($x = 3$).** Cambiamos la $x$por 3:

$$F(3) = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

- **Paso 3: Evaluar en el límite inferior ($x = 0$).** Cambiamos la $x$por 0:

$$F(0) = 0^2 = 0 \cdot 0 = 0$$

- **Paso 4: Aplicar la resta de Barrow ($F(3) - F(0)$).**

💡 **Inciso pedagógico (Regla de Barrow):** Restamos el valor del punto final del camino menos el valor del punto de inicio para quedarnos con el área real recorrida.

$$\text{Área} = 9 - 0 = 9$$

- **Resultado final:** 9(unidades cuadradas de área).

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 6.1:** Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (6x^5 - 2x + 7)\ dx$$

(Solución indicada: $x^6 - x^2 + 7x + C$)

2. **Propuesto 6.2:** Resuelve la siguiente integral con una constante fraccionaria:

$$\int (4x^3 + 3x^2)\ dx$$

(Solución indicada: $x^4 + x^3 + C$)

3. **Propuesto 6.3:** Aplica la Regla de Barrow para calcular el valor exacto de:

$$\int_1^2 3\,x^2\,dx$$

(Solución indicada: 7)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 6.1

- **Enunciado:** $\int (6x^5 - 2x + 7)\ dx$
- **Desarrollo:**
  1. *Término $6x^5$:* $6 \cdot \frac{x^{5+1}}{5+1} = 6 \cdot \frac{x^6}{6} = x^6$.
  2. *Término $-2x$:* $-2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = -2 \cdot \frac{x^2}{2} = -x^2$.
  3. *Término $+7$:* La integral de una constante es la constante multiplicada por x: $7x$.
  4. *Añadir $+C$:* Agregamos la constante de integración.
- **Resultado:** $x^6 - x^2 + 7x + C$

Solución del Propuesto 6.2

- **Enunciado:** $\int (4x^3 + 3x^2)\ dx$
- **Desarrollo:**
  1. *Término $4x^3$:* $4 \cdot \frac{x^4}{4} = x^4$.
  2. *Término $3x^2$:* $3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$.

3. *Juntamos y añadimos $+C$:* $x^4 + x^3 + C$.

- **Resultado:** $x^4 + x^3 + C$

Solución del Propuesto 6.3

- **Enunciado:** $\int_1^2 3\,x^2\,dx$
- **Desarrollo:**

1. *Primitiva:* $F(x) = 3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$.

2. *Límite superior ($b = 2$):* $F(2) = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

3. *Límite inferior ($a = 1$):* $F(1) = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.
4. *Resta de Barrow:* $F(2) - F(1) = 8 - 1 = 7$.

- **Resultado:** 7

📘 TEMA 7: EL DETECTIVE DE DATOS: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD BÁSICA

7.1. ¿Qué es la Estadística? Organizar el patio de recreo

Imagina que en una clase de 10 amigos queremos saber cuál es el sabor de helado favorito de todos o cuántos años tienen.

- **Población:** Es el grupo entero de personas o cosas que queremos estudiar (por ejemplo, todos los alumnos del colegio).
- **Muestra:** Es un grupito más pequeño que elegimos para no tener que preguntarles a miles de niños uno por uno.
- **Dato:** La respuesta individual que da cada persona (por ejemplo: "chocolate", "vainilla", "fresa").

7.2. Las Tres Reinas de la Estadística: Media, Mediana y Moda

Para entender los números de un grupo sin marearnos, usamos tres herramientas mágicas:

1. **La Media Aritmética (El Reparto Justo):**

Es el promedio de todos los números. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo el resultado entre la cantidad total de datos.

$$\text{Media} = \frac{\text{Suma de todos los datos}}{\text{Número total de datos}}$$

2. **La Mediana (El Número del Medio):**

Si colocamos a todos los números en fila india ordenados de menor a mayor, la Mediana es el número que queda exactamente en el centro.

   - Si la cantidad de números es **impar**, es el número del centro.
   - Si la cantidad de números es **par**, tomamos los **dos números centrales**, los sumamos y los dividimos entre 2.

3. **La Moda (El Más Popular):**

Es el número o dato que **más veces se repite** en la lista.

7.3. La Probabilidad: El Dado y la Moneda Mágica

La probabilidad mide la oportunidad de que algo ocurra cuando interviene la suerte (como tirar un dado o una moneda).

🎲 **La Regla de Laplace:**

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos Favorables (los que yo quiero)}}{\text{Casos Posibles (todos los que pueden salir)}}$$

- Si tiramos una moneda al aire:
  - Casos posibles: 2 (Cara o Cruz).
  - Si queremos que salga "Cara" (1 caso favorable): $\frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$ de probabilidad.
- Si tiramos un dado de 6 caras:
  - Casos posibles: 6 (los números del 1 al 6).
  - Si queremos que salga el número 4 (1 caso favorable): $\frac{1}{6}$.

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 7.1

En un equipo de baloncesto infantil, las alturas en centímetros de 5 jugadores son:

$$130 \text{ cm}, 135 \text{ cm}, 130 \text{ cm}, 140 \text{ cm}, 145 \text{ cm}$$

Calcula la Media, la Mediana y la Moda de sus alturas.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Calcular la Media Aritmética (El Reparto Justo).
  - Sumamos todas las alturas:

$$130 + 135 + 130 + 140 + 145 = 680$$

  - Dividimos entre el número total de jugadores (5):

$$\text{Media} = \frac{680}{5} = 136 \text{ cm}$$

- 💡 **Inciso pedagógico (¿Qué significa este resultado?):** Significa que si todos los jugadores midieran exactamente lo mismo manteniendo la altura combinada del equipo, cada uno mediría 136 cm.
- Paso 2: Calcular la Mediana (El del medio).
  - Primero ordenamos los números de menor a mayor:

$$130, 130, \mathbf{135}, 140, 145$$

  - Como son 5 números (cantidad impar), el número que queda en la tercera posición (el centro exacto) es el 135.

$$\text{Mediana} = 135 \text{ cm}$$

- Paso 3: Calcular la Moda (El más popular).
  - Miramos cuál número se repite más veces:
    - 130 aparece 2 veces.
    - $135,140,145$ aparecen solo 1 vez cada uno.

$$\text{Moda} = 130 \text{ cm}$$

- **Resultado final: Media** $= 136$ cm**, Mediana** $= 135$ cm**, Moda** $= 130$ cm

Ejercicio Resuelto 7.2

En una bolsa mágica opaca hay 3 canicas rojas, 2 canicas azules y 5 canicas verdes. Si metemos la mano sin mirar y

sacamos una canica, ¿cuál es la probabilidad de que salga una canica azul?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Contar los Casos Posibles (el total de canicas).**

$$\text{Total} = 3\ (\text{rojas}) + 2\ (\text{azules}) + 5\ (\text{verdes}) = 10\ \text{canicas}$$

- **Paso 2: Contar los Casos Favorables (las que nos piden).**

Queremos sacar una canica azul:

$$\text{Casos Favorables} = 2$$

- **Paso 3: Aplicar la Regla de Laplace.**

$$\text{Probabilidad} = \frac{2}{10}$$

💡 **Inciso pedagógico (Simplificar y vestir con disfraces):**

  - En forma de fracción simplificada (dividiendo entre 2 arriba y abajo): $\frac{2\div2}{10\div2} = \frac{1}{5}$.
  - En forma de número decimal: $2 \div 10 = 0{,}20$.
  - En forma de porcentaje: $0{,}20 \cdot 100 = 20\%$.

- **Resultado final: $\frac{1}{5}$ (o un 20% de probabilidad)**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 7.1:** En cuatro exámenes de matemáticas, Lucía ha sacado las siguientes notas: $6{,}8{,}9{,}9$.

Calcula la **Media** y la **Moda** de sus notas.

(Solución indicada: Media $= 8$; Moda $= 9$)

2. **Propuesto 7.2:** Seis amigos tienen las siguientes edades: $10{,}8{,}12{,}14{,}8{,}10$.

Halla la **Mediana** de sus edades.

(Solución indicada: Mediana $= 10$ años)

3. **Propuesto 7.3:** Tiramos un dado clásico de 6 caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un **número par**?

(Solución indicada: $\frac{1}{2}$ o 50%)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 7.1

- **Enunciado:** Notas: $6,8,9,9$.
- **Desarrollo:**
  1. *Media:* Sumamos todas las notas y dividimos entre 4:
  $$\frac{6+8+9+9}{4}=\frac{32}{4}=8$$
  2. *Moda:* El número que más veces se repite es el 9 (aparece dos veces).
- **Resultado: Media** $=8$**, Moda** $=9$

Solución del Propuesto 7.2

- **Enunciado:** Edades: $10,8,12,14,8,10$.
- **Desarrollo:**
  1. *Ordenar los datos de menor a mayor:*
  $$8,\ 8,\ \mathbf{10},\ \mathbf{10},\ 12,\ 14$$
  2. *Buscar el centro:* Como son 6 datos (número par), tomamos los dos valores centrales (posición 3 y posición 4), que son 10 y 10.
  3. *Calcular la mediana:* Sumamos ambos y dividimos entre 2:
  $$\text{Mediana}=\frac{10+10}{2}=\frac{20}{2}=10$$
- **Resultado: Mediana** $=10$ años

Solución del Propuesto 7.3

- **Enunciado:** Probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado de 6 caras.
- **Desarrollo:**
  1. *Casos posibles:* $\{1,2,3,4,5,6\}\Longrightarrow 6$ casos en total.
  2. *Casos favorables (números pares):* $\{2,4,6\}\Longrightarrow$ 3 casos favorables.
  3. *Regla de Laplace:*
  $$\text{Probabilidad}=\frac{3}{6}$$

4. *Simplificación:* Dividimos entre 3 arriba y abajo: $\frac{3\div3}{6\div3}=\frac{1}{2}=0{,}50=50\%$.

- **Resultado: $\frac{1}{2}$ (o 50%)**

📘 TEMA 8: LA FÓRMULA MAESTRA PARA RESOLVER CUALQUIER PROBLEMA: EL MÉTODO L.E.D.O.C. Y LOS ERRORES TÍPICOS

8.1. La Receta del Chef Matemático: El Proceso L.E.D.O.C.

Cuando vemos un problema largo en un examen, muchas veces nos asustamos o empezamos a sumar números sin pensar. Para que eso no pase nunca más, usamos los **5 pasos del método L.E.D.O.C.**:

1. 📖 **L - Leer:** Leemos el problema despacio, dos o tres veces, como un cuento de detectives, hasta entender la historia.
2. 🧠 **E - Entender:** Separamos claramente lo que **nos dan** (los datos) y lo que **buscamos** (la incógnita o misterio).
3. 🗺️ **D - Descubrir:** Elegimos qué herramientas matemáticas necesitamos (¿será una suma, una regla de tres, una ecuación o un perímetro?).
4. ⚙️ **O - Operar:** Hacemos las cuentas con calma, paso a paso, respetando los signos y el orden PEMDAS.
5. 🔍 **C - Comprobar:** Miramos el resultado final y nos preguntamos: *«¿Tiene sentido esta respuesta en la vida real?»*

Veamos su aplicación práctica en un problema:

"Eres el primer comprador de una parcela de terreno urbanizable, con forma de rectángulo, que tiene 30 metros de largo y 22 metros de ancho. El Ayuntamiento te exige que marques ese terreno usando una valla. Hablas con un constructor y te dice que te va a cobrar el metro de valla a 25€ + I.V.A.

Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

1. Leer el problema detenidamente para Entender qué nos piden que averiguemos y qué datos nos dan.

Esta fase es crucial. No importa si tienes que leer el problema tres veces seguidas (o las que haga falta).

Antes de ponerte a operar, asegúrate de haber entendido qué datos te están dándo y cuál es la incognita que debes averiguar. Vamos al turrón.

Nos piden que averiguemos el coste de vallar nuestra parcela. A éste elemento le llamaremos *incógnita*.

Como *datos* nos dan las dimensiones del terreno, nos dicen que tiene forma de rectángulo y por último, cuánto cuesta el metro de valla construido.

Además, nos piden que le apliquemos el Impuesto del Valor Añadido (I.V.A.), y nos dicen que el porcentaje a incrementar es del 21%.

2. Descubrir qué àreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.

Tenemos tres datos en forma de números naturales (largo, ancho y precio), por lo que recurriremos a la aritmética y nos dicen que es un rectángulo, por lo que también es un tema de geometría.

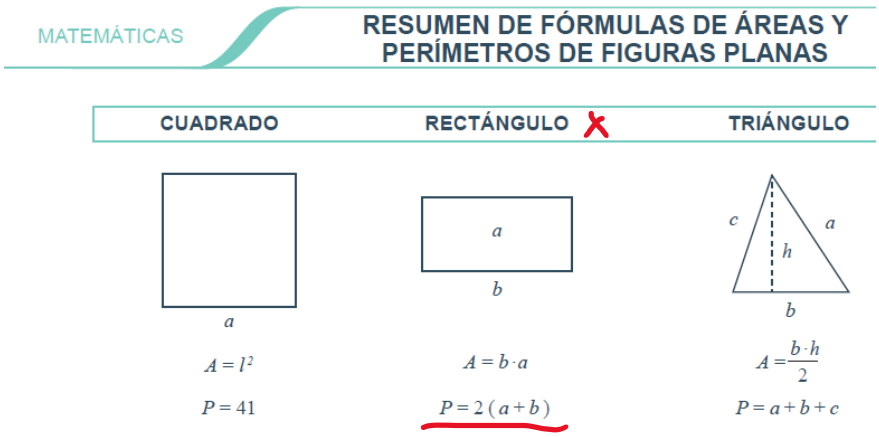
Dentro de la geometría, se trata del perímetro de un rectángulo, que es la suma de todos los lados del mismo, por lo que podemos deducirlo de dos maneras diferentes: o sumamos los cuatro lados o hacemos servir la formula correspondiente a la perímetro de un rectángulo.

Para la parte impositiva nos toca echar mano de lo que aprendimos en la aritmética de las proporciones, sobre reglas de tres y cálculo de porcentajes.

3. Ejecutar las Operaciones matemáticas correspondientes.

Averiguamos la distancia a vallar sumando los cuatro lados, es decir, 30 + 22 + 30 + 22 = 104 metros.

O podemos recurrir la fórmula del perímetro de un rectángulo que es P = 2 (a+b) y se lee como "Perímetro es igual a multiplicar por dos la suma del lado más largo y la del lado más corto".



P = 2 (a+b) y aplicando → 2 (30+22) → 2 (52) → 104 metros.

Finalmente, multiplicamos los 104 metros por los 25€ que cuesta el metro de valla y obtenemos que

104 metros x 25€ = 2.600€

Pero aún nos queda por responder a la parte impositiva. Es un tema que podemos resolver de tres maneras diferentes:

Método 1: Mediante una Regla de Tres con resultado parcial.

Precio en €	*Porcentaje*
2.600€	100
X	21

$$X = \frac{2.600 \; x \; 21}{100} = 546€$$

Ojo al Cristo, que es de plata. 546€ es lo que nos cobran de I.V.A. Si nos piden sólo eso, ya hemos terminado.

Pero si volvemos al enunciado, decía:

(…) "Calcula cuánto te va a costar construir esa valla, sabiendo que el tipo de I.V.A. a aplicar es del 21%"

Por lo que al precio sin I.V.A. que son 2.600€, toca añadirle lo que hemos calculado, que son 546€. Así pues, lo que tenemos que hacer es sumar ambas cantidades:

$$2.600€ + 546€ = 3.146€.$$

Ya lo tenemos, pero no te cierres mentalmente en banda, ya que aún nos quedan otros dos métodos.

Método 2: Mediante una Regla de Tres con resultado global.

Como nos piden cuánto es el precio total, sabemos que al 100% de lo calculado (2.600€) hay que añadirle el 21% de I.V.A. por lo que, en realidad, visto en términos de porcentaje total, nos interesa conocer cuánto dinero es el 121% de 2.600€. También lo podemos resolver mediante otra regla de tres:

Precio en €	*Porcentaje*
2.600€	100
X	121

$$X=\frac{2.600\ x\ 121}{100} = 3.146€$$

Método 3: Mediante Cálculo de porcentaje directo.

Este tercer método es el que más me gusta, por lo sencillo y rápido que es. Recuerda lo que vimos al respecto.

PORCENTAJES – MÉTODO DIRECTO	
Si quiero calcular el 25%	·0,25
Si quiero calcular el 30%	·0,30
Si quiero aumentar un 25%	·1,25
Si quiero aumentar un 30%	·1,30
Si quiero disminuir un 25%	·0,75
Si quiero disminuir un 30%	·0,70

Si quiero aumentar un 21%, todo lo que tengo que hacer es multiplicar el importe sin I.V.A. (2.600€) por 1,21 y ya lo tengo:

$$2.600€ * 1,21 = 3.146€.$$

4. Comprobar el resultado, primero desde la lógica y luego con operaciones complementarias.

Mediante la lógica:

El resultado es razonablemente correcto porque, si hubiésemos vallado 100 metros nos hubiese costado 2.500€. Como lo obtenido es ligeramente superior, debe ser correcto. Observa que sólo comprobamos la parte principal, para facilitar y agilizar las operaciones.

Mediante operaciones complementárias:

100 metros serían 2.500€ y 4 metros son 25x4€= 100€ por lo que si sumamos 100 + 4 metros son 2.500€ + 100€, y salen los 2.600€ que hemos obtenido antes.

Podemos estar tranquilos/as ya que el resultado es correcto, puesto que hemos llegado a él por dos lineas de razonamiento y de operación diferentes.

Oye, Ramón… ¿Y si me ponen un ejercicio?

Pues lo mismo, mi querido/a amigo/a, aplicaremos paso a paso el proceso **L.E.D.O.C.**

1º LEER el enunciado →

"Hallar la derivada de la función

y = $12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$"

2º ENTENDER qué nos están pidiendo. → Esto es un ejercicio de cálculo, no un problema.

3º DESCUBRIR qué áreas de las matemáticas debemos usar para hallar la respuesta.

Como nos piden "Hallar la derivada", pues es un ejercicio de Cálculo Diferencial como una casa.

4º OPERAR para hallar el resultado.

y = $12X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 2X^2 + 5X - 10$

$\frac{dy}{dx} = 5 * 12X^4 - 4 * 3X^3 + 3 * 8X^2 - 2 * 2X^1 + 5 * 1\ (X^0) - 0$

$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5 - 0$

Y aunque con este aspecto está intrínsecamente correcta, por costumbre, cuando tenemos una constante (10, en este caso) cuya derivada es 0, éste 0 no se pone, con lo que el resultado final de la derivada, así en plan bonito, y con la ropa de los domingos, sería:

$$\frac{dy}{dx} = 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$$

5º COMPROBAR el resultado: Si las circunstancias lo permiten, es mejor hacerlo. Si el tiempo apremia, como en un exámen, mejor volver a repasar el desarrollo, una vez hayas terminado el resto de ejercicios.

En este ejemplo, si hacemos la integral de

$60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5$

Nos debería dar la función original. Vamos a probar:

$$\int 60X^4 - 12X^3 + 24X^2 - 4X + 5 - 0$$

$$\frac{60X^5}{5} - \frac{12X^4}{4} + \frac{24X^3}{3} - \frac{4X^2}{2} + 5X - C$$

y = $12X^5$ - $3X^4$+ $8X^3$ - $2X^2$ + 5X – C.

SÍ, está bien, porque hemos recuperado la función original.

8.2. El "Hit Parade" de las Grandes Pifias (Errores que no debes cometer)

Para ser un auténtico maestro de las matemáticas, debes conocer las trampas más comunes.

GRANDES PIFIAS DE AYER Y HOY…

En este apartado voy a hablar de obviedades que cualquier persona a la que se le dén bien las matemàticas, va a pensar que son, de puro simple, tontorronas.

Pero es que este texto no se ha escrito para ellas. Se ha escrito para personas como yo, que las matemáticas no las vivimos, las sufrimos.

Una fuente de pifias, también llamadas errores típicos se dá en el momento en el que confundimos acciones usuales de sumas y restas, con acciones usuales de multiplicaciones y divisiones.

Así que el primer aviso a navegantes que puedo dar es el siguiente:

CUIDADO CON APLICAR LO MISMO A SUMAS Y RESTAS, QUE A MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES.

Me explico: En Álgebra y en potencias cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Y desgraciadamente, es demasiado frecuente que se produzcan confusiones y se termine operando de manera errónea.

Así pues en álgebra, debemos distinguir muy claramente entre término de una operación y signo de una operación.

El termino es cada uno de los componentes de la operación. En X+2=5 tenemos tres términos, que son la X, el 2 y el 5. Y el signo de todos ellos es positivo.

Para poder resolver esa pequeña ecuación, toca cambiar el término 2 al otro lado de igual, tal que así X= 5 – 2 → X = 3.

Si hay una resta: X – 6 =10 → X= 10+6 → X=16

RECUERDA: Cada vez que desplazamos un término al otro lado del igual (=), toca cambiar el operador por su inverso.

NO CONFUNDIR EL OPERADOR CON EL SIGNO DEL TÉRMINO.

Pero cuando la X va multiplicada o dividida por un número, al saltar éste al otro lado del igual, NUNCA JAMÁS LE CAMBIAREMOS EL SIGNO.

Veamos un ejemplo

$5x + 15 = 0 \Rightarrow 5x = -15 \Rightarrow x=\frac{-15}{5} \Rightarrow x = -3$

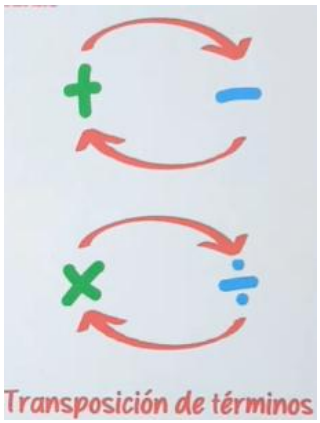
Solución: Pensar *"¿Por qué número puedo dividir (multiplicar) esos dos términos para que me quede la X sola?"*

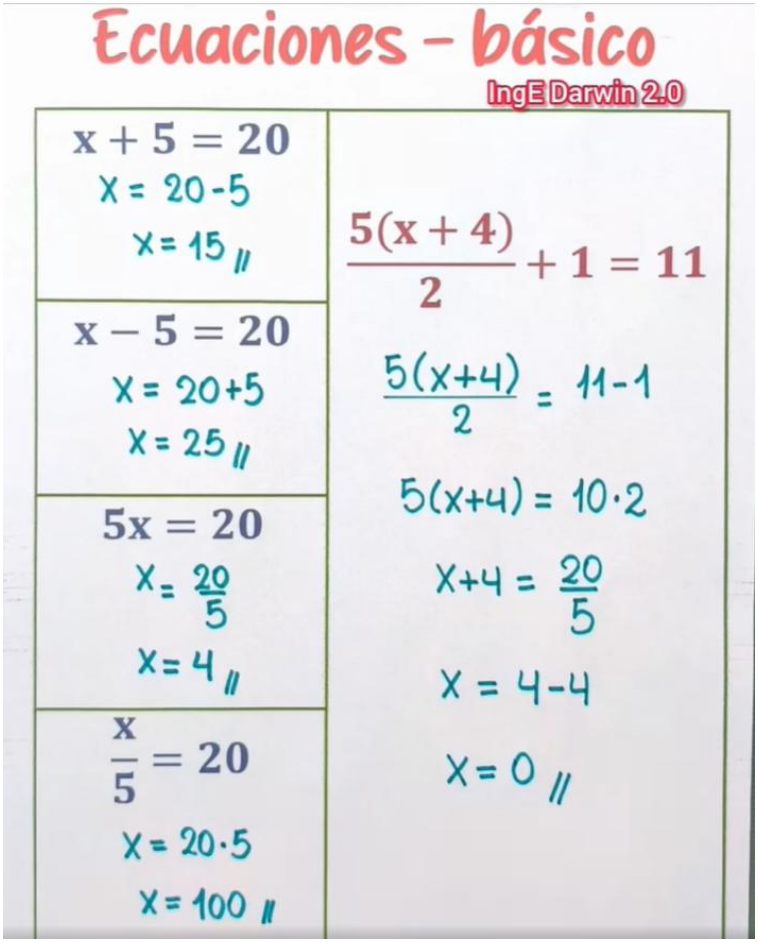
Pues, evidentemente por el número que está multiplicando (dividiendo) la X. Entonces haríamos la siguiente operación:

$5x + 15 = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{5} + \frac{15}{5} = 0$

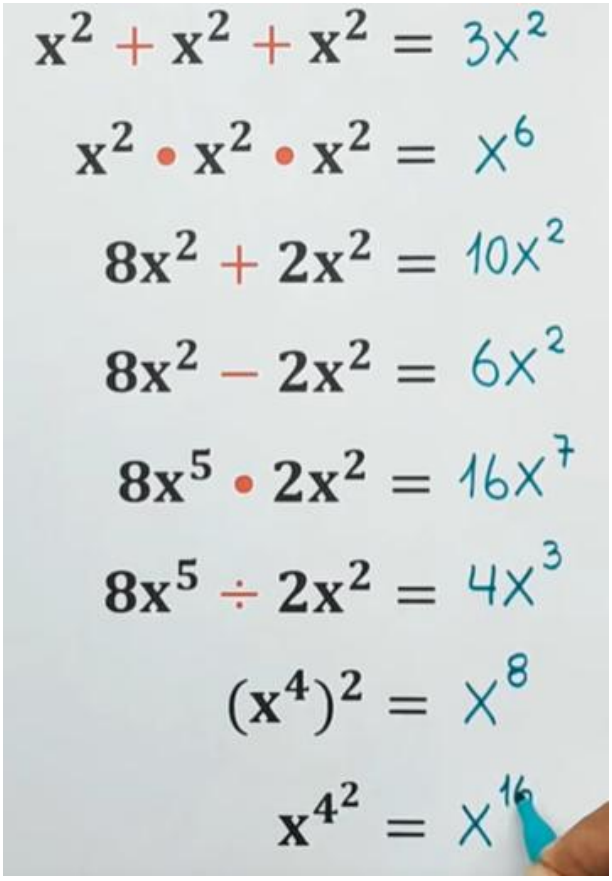
$x + 3=0 \Rightarrow$ x = -3

Este es el método de la transposición de términos, lo que implica mover elementos entre ambos lados de la igualdad, con la pretensión de dejar la X sola. No olvidemos que, cuando hagamos la transposición del término que multiplica o divide a la X, **Jamás cambiaremos el signo**. Lo repetiré hasta la extenuación, porque es un fallo muy, pero que muy corriente.



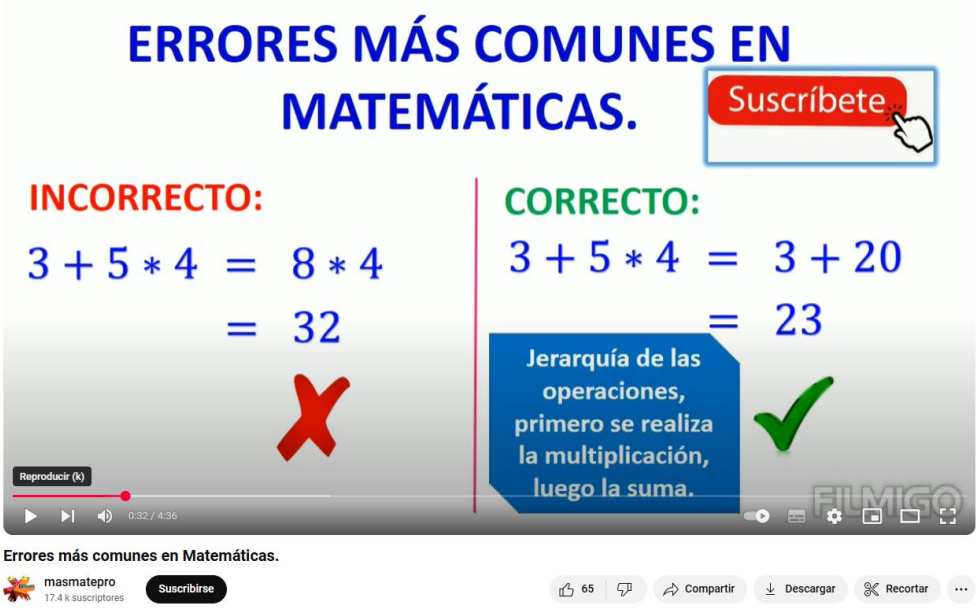


Antes de seguir hablando de errores comunes, veamos cómo se hacen esas operaciones de manera correcta. Huelga decir que estamos repasando las operaciones con potencias:



Y ahora, os presento el Hit Parade de las diez pifias más usuales y garrafales.

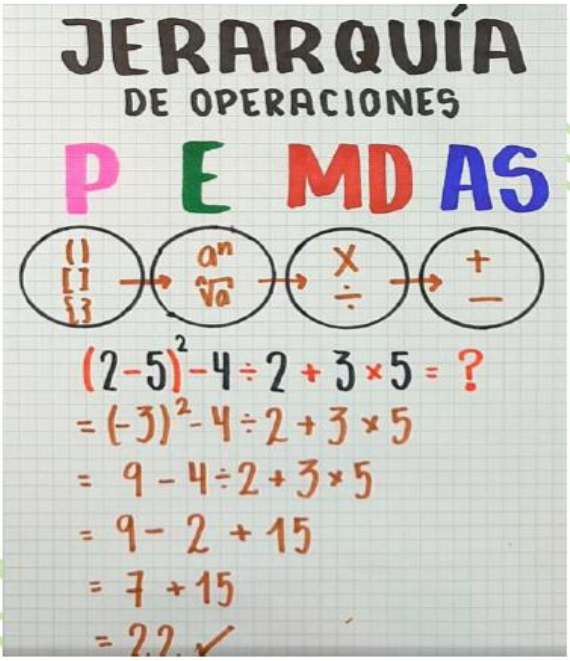
DIAPOSITIVA 1



Errores más comunes en Matemáticas.

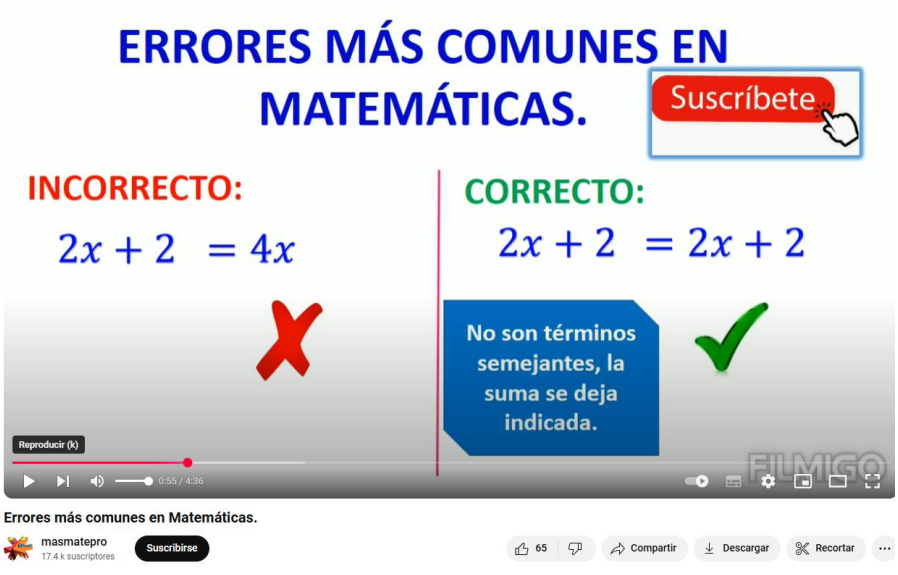
masmatepro
17.4 k suscriptores
Suscribirse
65
Compartir
Descargar
Recortar

Debes recordar siempre el orden de prioridad en la resolución de operaciones PEMDAS:



1) **P**aréntesis
2) **E**xponentes (Potencias y Raíces)
3) **M**ultiplicaciones y **D**ivisiones.
4) **A**diciones (Sumas) y **S**ustracciones (Restas).

DIAPOSITIVA 2



Siendo sumas y restas No podemos mezclar churras con merinas: la operación se deja tal y como está

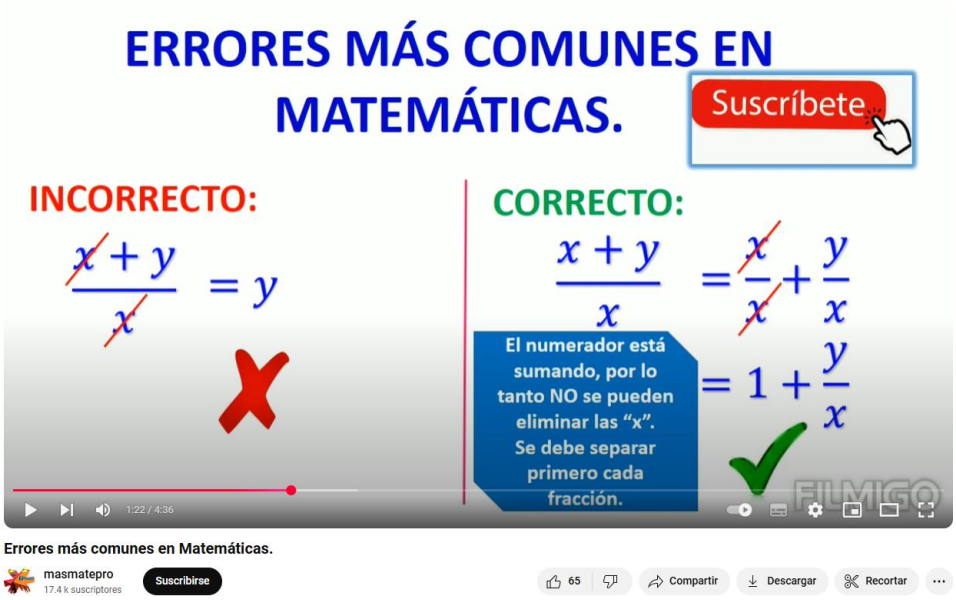
2x + 2 = 2x + 2 2x - 2 = 2x – 2

Pero si se trata de multiplicaciones y divisiones sí podemos operar

(2x) * 2 = 4x

$$\frac{2x}{2} = x$$

DIAPOSITIVA 3



Lo dicho, ojo al Cristo que es de Plata:

Cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Siempre que veas en una operación de éstas, con sumas y restas = **PELIGRO**.

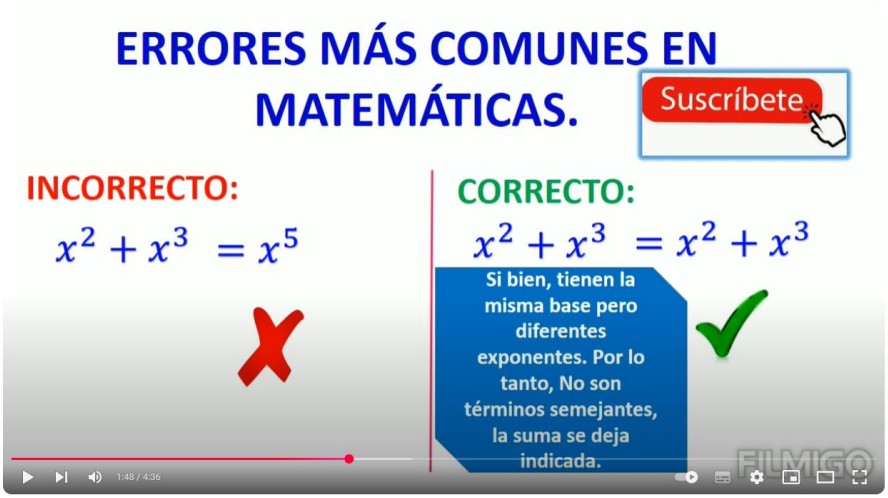
Solución:

Para operar correctamente, hay que descomponer la fracción compuesta en dos fracciones simples, con lo que ya se pueden operar.

Una fracción en la que las cifras del numerador y denominador coinciden, es siempre es igual a 1. Se llaman "fracciones iguales a la unidad".

$$\frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{4}{4} = 1 \qquad \frac{36}{36} = 1$$

DIAPOSITIVA 4



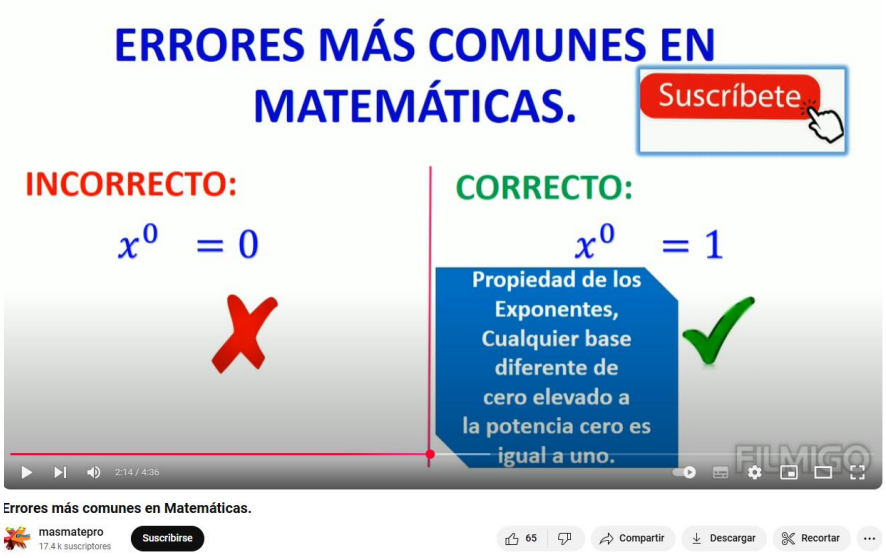
Vuelta la mula al carro:

Cuando las operaciones son sumas y restas, pasa una cosa, y cuando las operaciones son multiplicaciones y divisiones, pasa otra cosa diferente.

Siempre que veas en una operación con sumas y restas = PELIGRO

Aquí la pífia ha sido confundir la suma con una multiplicación, porque en $x^2 * x^3$ sí se suman los exponentes, siendo x^5.

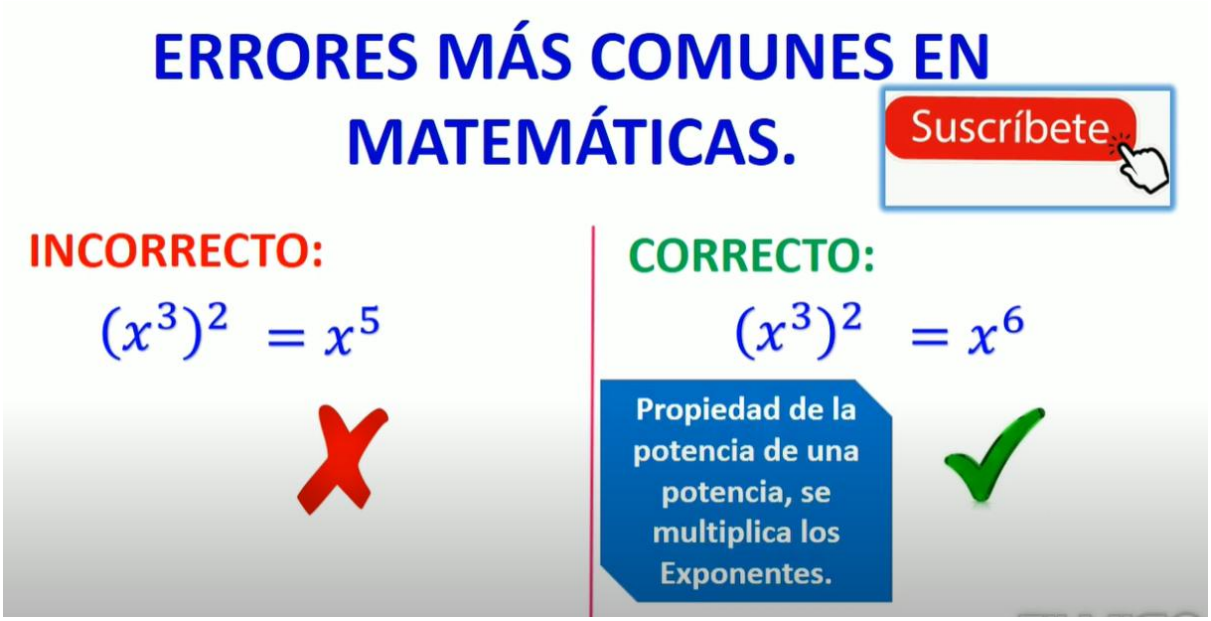
DIAPOSITIVA 5



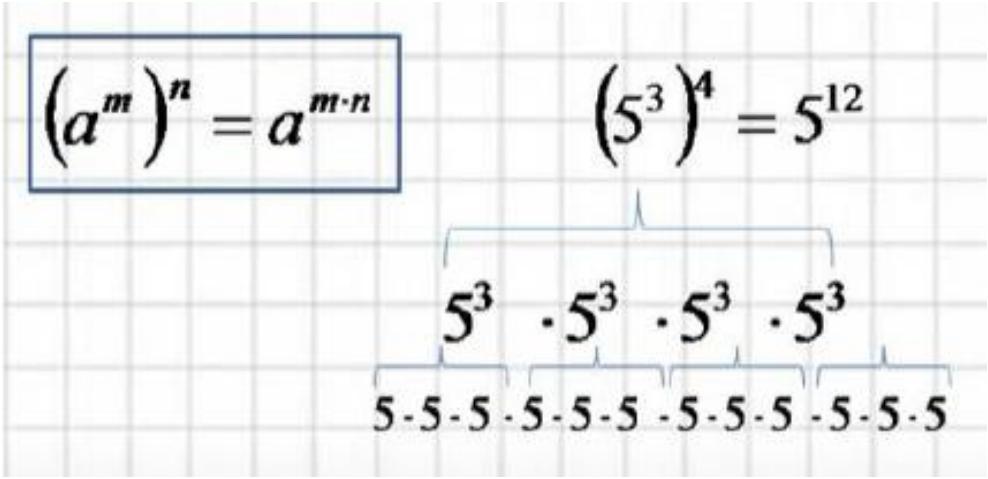
Debemos dominar las leyes de las potencias y tenerlas clara.

$a^0 = 1$ → $1 = \frac{8}{8} = \frac{2^3}{2^3} = 2^0$ Aplicando la Propiedad TRANSITIVA→ *Si a=b y b=c, entonces a=c*

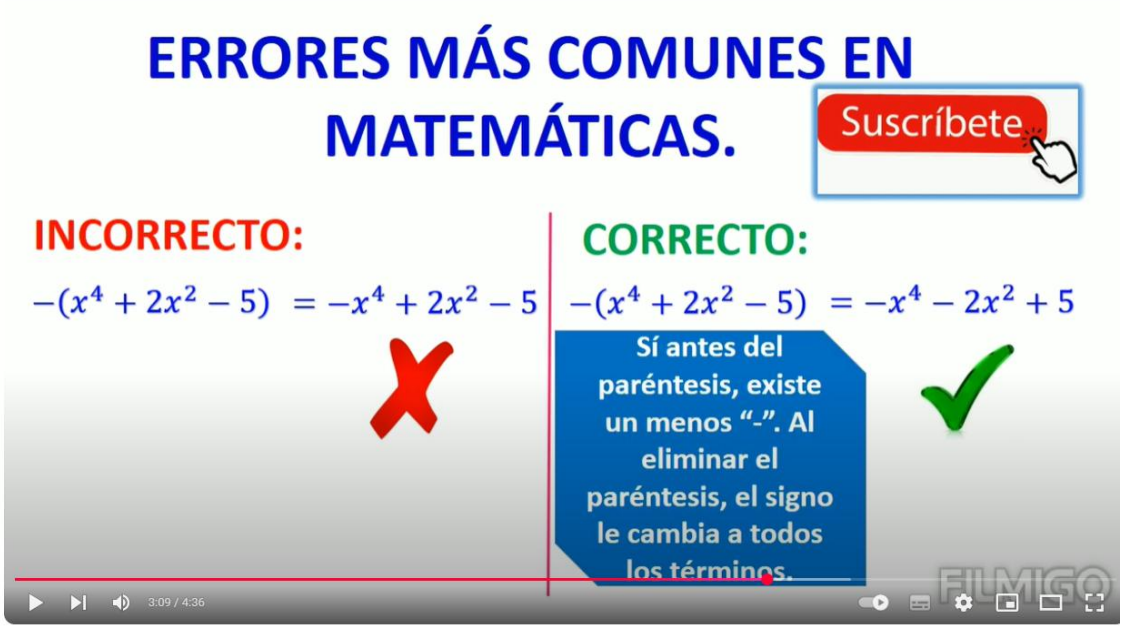
DIAPOSITIVA 6



Más de lo mismo, esas leyes de potencias, como la palma de tu mano:



DIAPOSITIVA 7



Errores más comunes en Matemáticas.

masmatepro
17.4 k suscriptores
Suscribirse
65 Compartir Descargar Recortar

MatemáticaTuya

$$3-(4(11-(6-7)-5)-8)$$

Solución

$3-(4(11-(6-7)-5)-8)$ Se efectúa las operaciones dentro de los paréntesis más internos

$=3-(4(11-(-1)-5)-8)$ Multiplicación de signos

$=3-(4(11+1-5)-8)$ Se efectúa las operaciones dentro de los paréntesis más internos de la expresión resultante

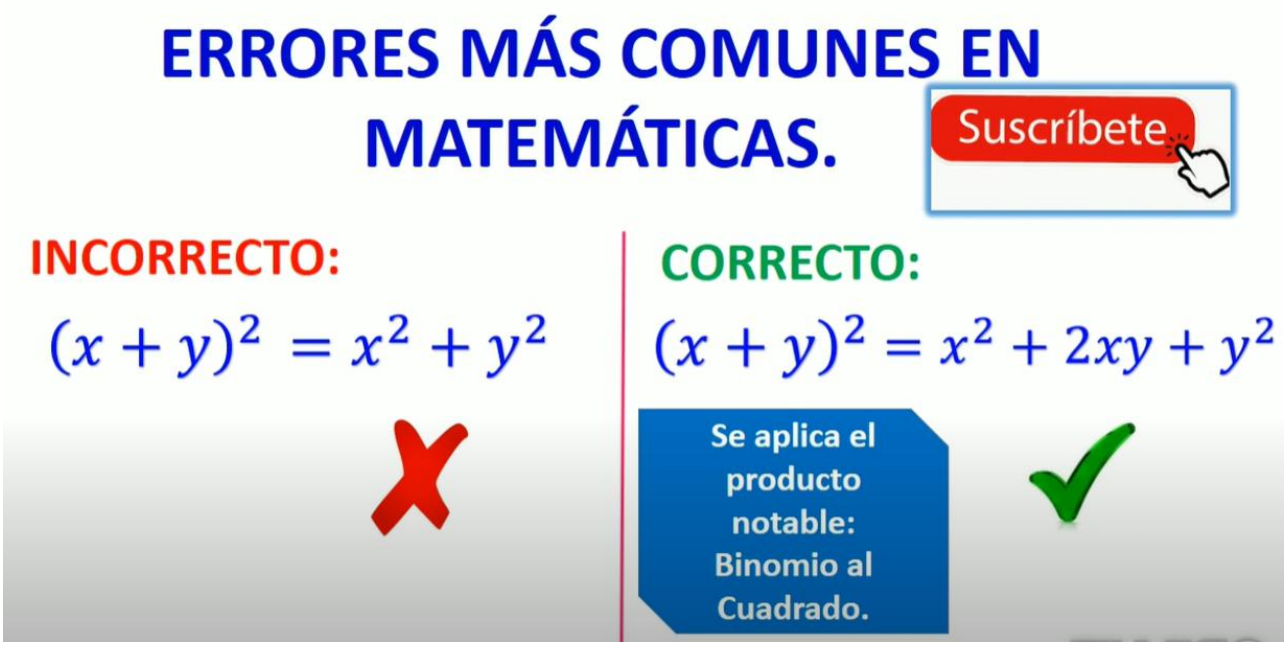
$=3-(4\cdot 7-8)$ Se calcula la expresión del par de paréntesis de la expresión resultante, respetando la jerarquía de la operaciones

$=3-(28-8)$

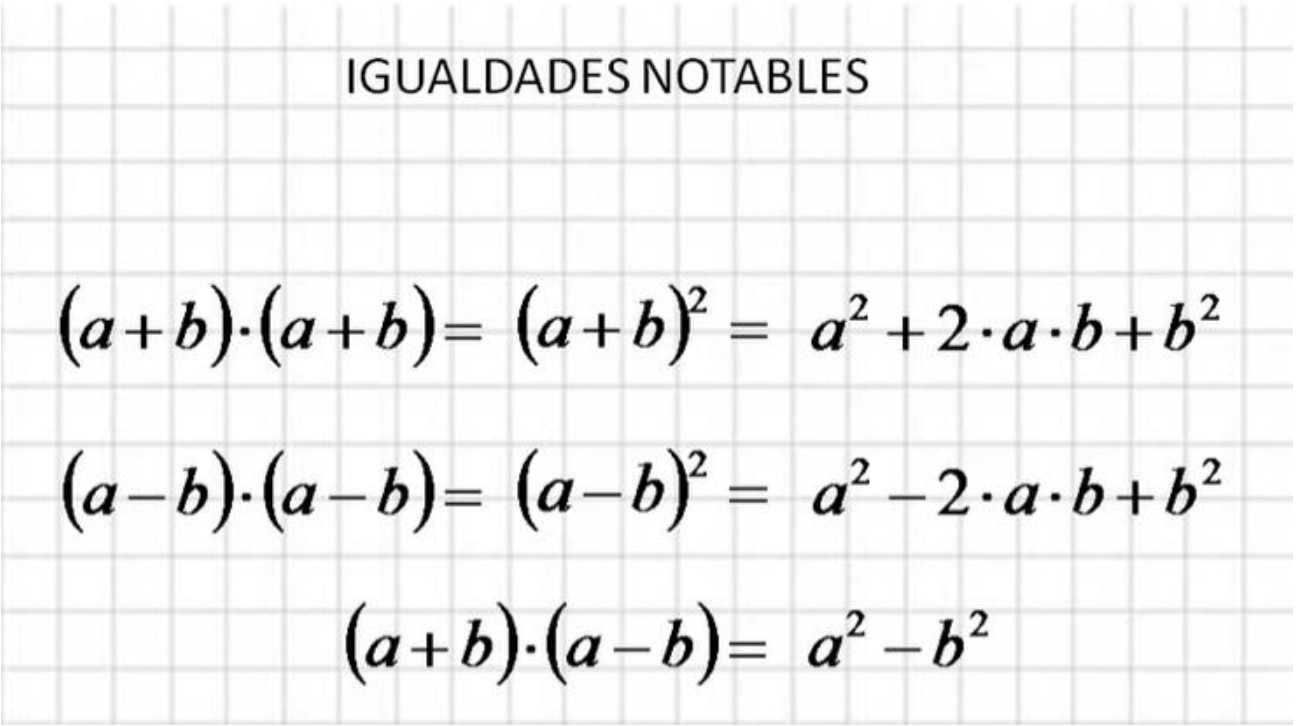
$=3-20$

$=-17$

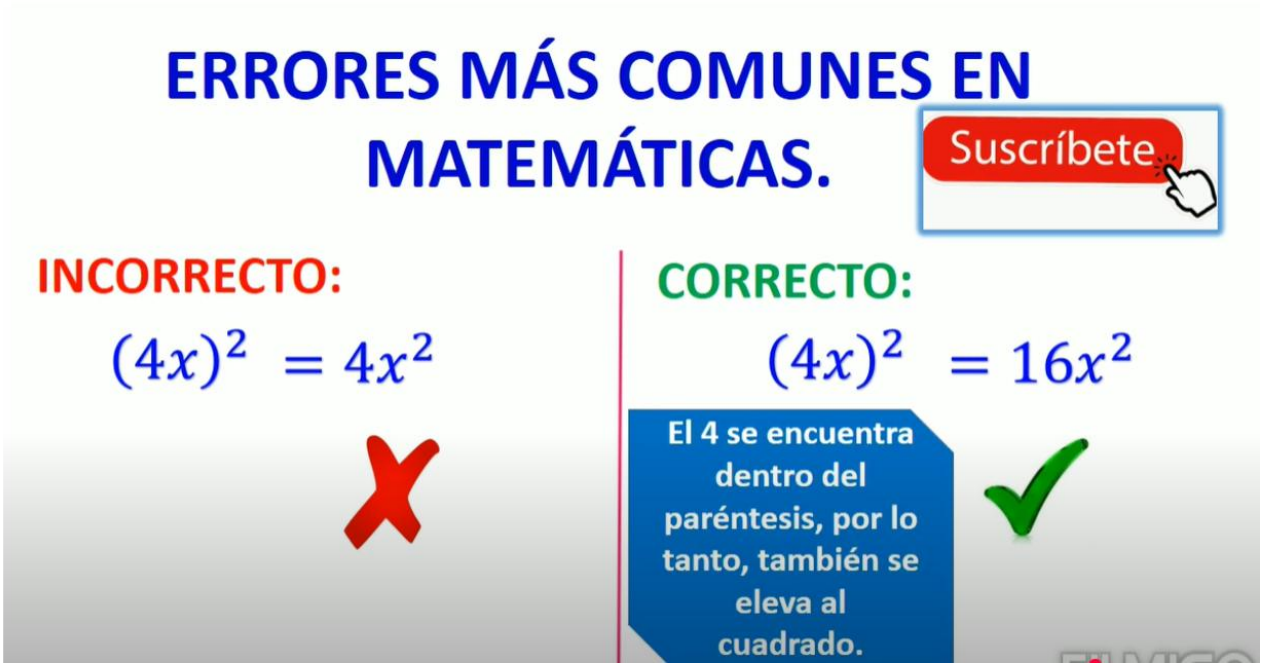
DIAPOSITIVA 8



Las identidades notables que vimos en la Geometría Euclideana nos las encontraremos hasta en la sopa:



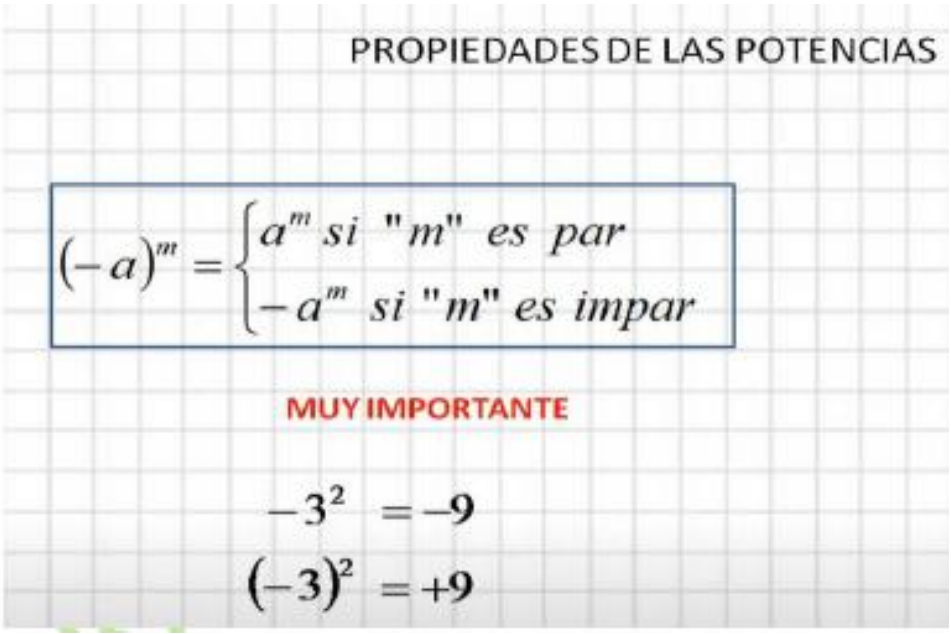
DIAPOSITIVA 9



Operación con paréntesis: Paginas 58 a 68

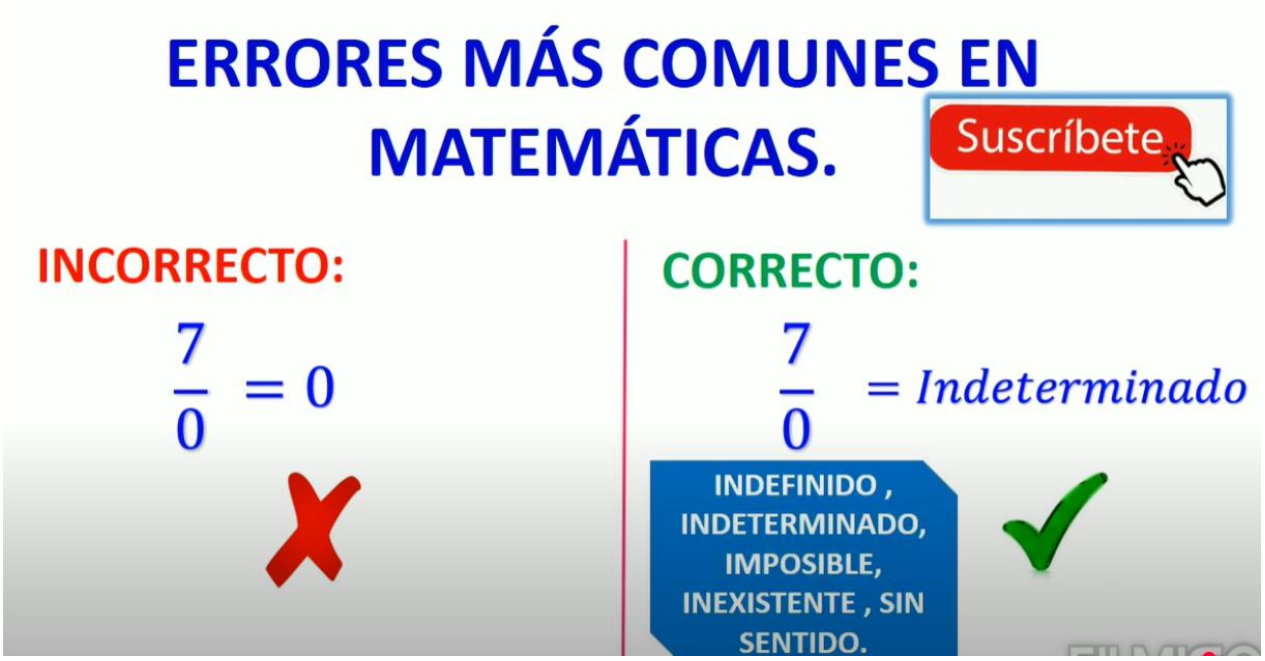
Todo lo que vaya dentro de un paréntesis y esté, a su vez, elevado a algo, se vé afectado por el elevado a algo.

Y cuando digo Todo es TODO: signo, incógnita y número.



Por lo que $(-3)^3 = -27$.

DIAPOSITIVA 10



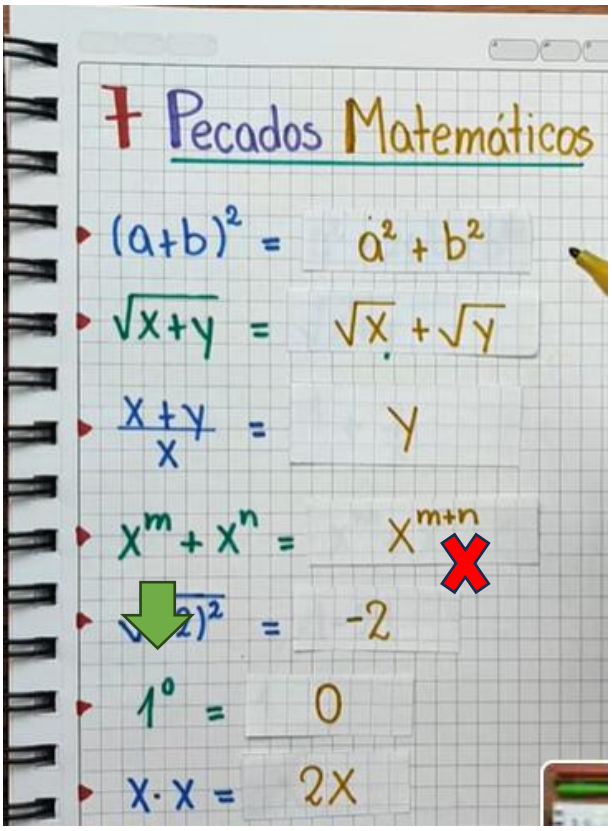
Una división es una sucesión de restas en las que tenemos por objetivo llegar a cero.

Decimos que 6 dividido entre 3 es igual a dos, porque necesitamos dos restas consecutivas para pasar de 6 a 0.

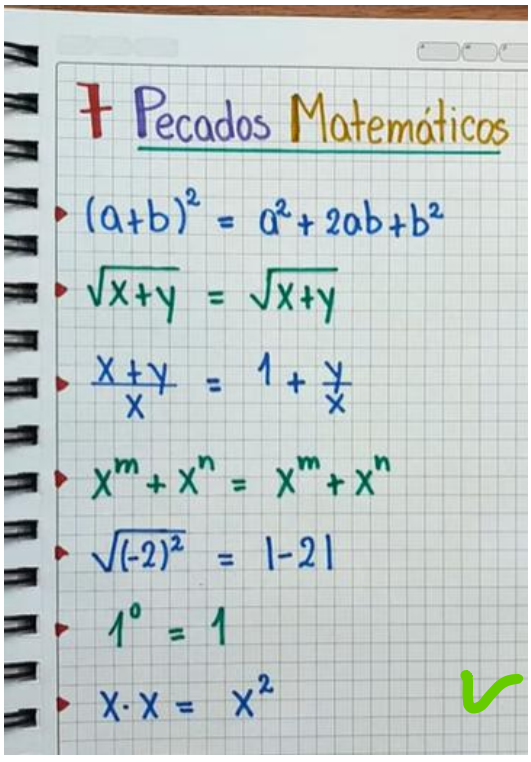
1º resta 6-3= 3

2º resta 3-3= 0

Sin embargo en la operación 6-0 = 6 podemos hacer la resta infinitas veces, que siempre nos dará 6 y por lo tanto, jamás llegaremos a alcanzar el número cero.



MAL



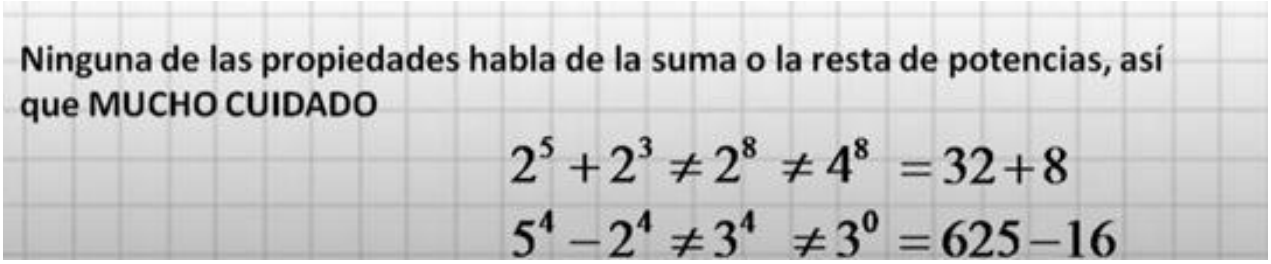
BIEN

Y con las potencias pasa lo mismo: **Las leyes de las potencias NUNCA SE APLICAN A SUMAS Y RESTAS DE POTENCIAS.**

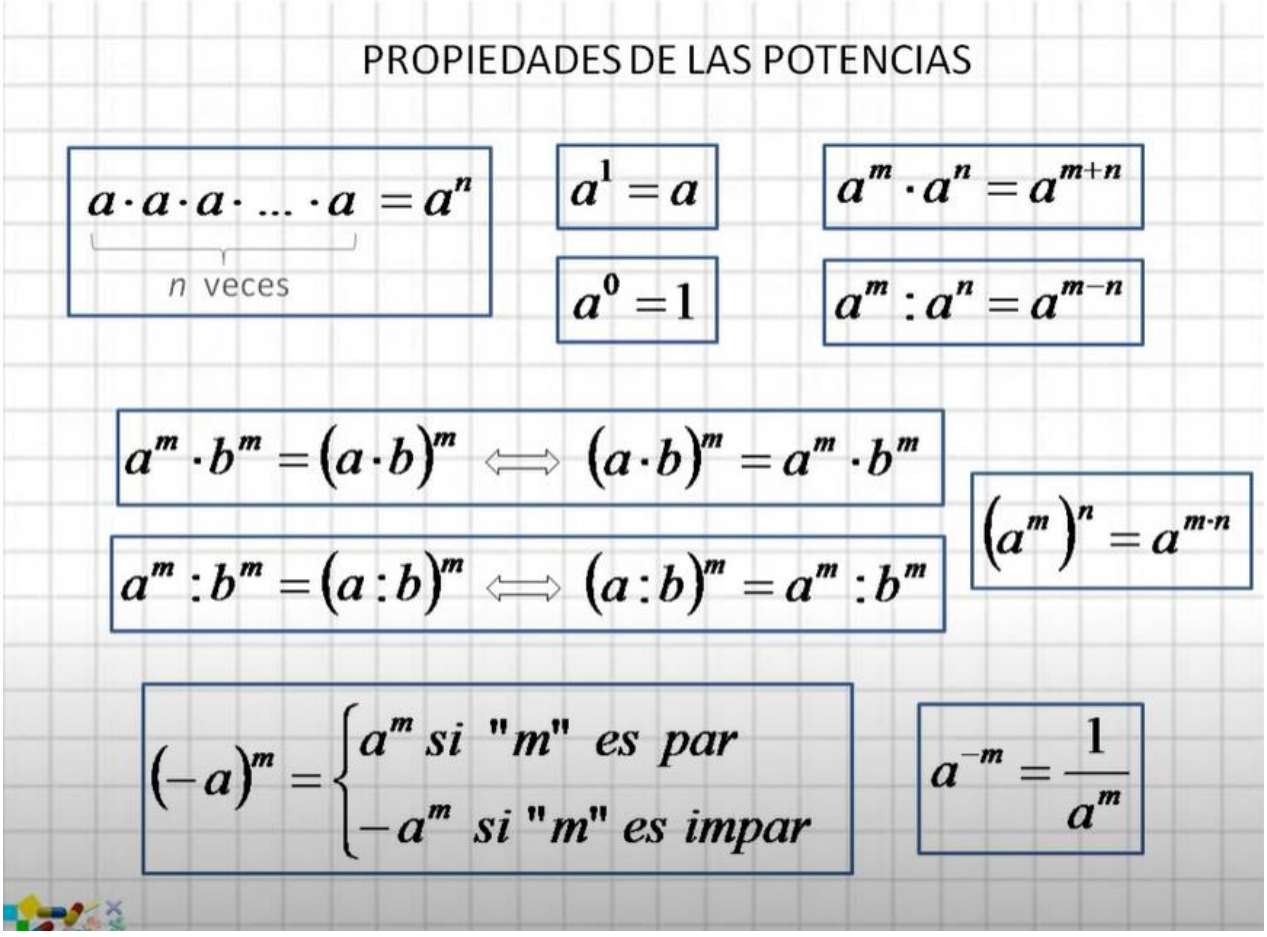
Para el caso de la suma y resta de potencias, **primero operamos cada potencia por separado (de igual o diferente base) y** luego **sumamos o restamos los resultados**.

Esto aplica, tanto si las potencias son de Igual base: $2^5+2^3=32+8=$ 40.

Como si son de Diferente base: $5^4-2^4=625-16=$ 609.



Con las multiplicaciones y divisiones de potencias sí que se aplican las leyes de las potencias, que te resumo brevemente:



RESÚMEN CORTO PARA CORTAR Y COPIAR:

- ❌ **Pifia 1: Mezclar churras con merinas en sumas algebraicas.**
  - **Mal:** $2x + 3 = 5x$
  - **Bien:** $2x + 3$ no se puede juntar más, se queda como $2x + 3$ (solo se suman letras iguales con letras iguales).
- ❌ **Pifia 2: Sumar exponentes en sumas de números.**
  - **Mal:** $x^2 + x^3 = x^5$
  - **Bien:** Solo sumamos exponentes si se están **multiplicando**: $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$.
- ❌ **Pifia 3: Olvidar el poder del paréntesis en signos negativos.**
  - **Mal:** $-3^2 = +9$
  - **Bien:** Sin paréntesis, el signo menos se queda fuera: $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$. Con paréntesis sí cambia: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$.
- ❌ **Pifia 4: Cambiar el signo al pasar dividiendo.**
  - Si tienes $-5x = 20$, el -5 pasa dividiendo completo con su signo: $x = \frac{20}{-5} = -4$. ¡No le cambies el signo menos a más cuando pasa de multiplicar a dividir!

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 8.1

Problema de la vida real resuelto con L.E.D.O.C.:

Queremos poner una valla de madera alrededor de un huerto rectangular que mide 20 metros de largo y 10 metros de ancho. El metro de valla cuesta $5\,€$. Además, la tienda nos cobra un 21% de impuesto (I.V.A.) sobre el precio total. ¿Cuánto dinero costará vallar el huerto por completo?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **1. L - Leer:** Leemos la historia con calma. Hay un terreno rectangular que rodear con una valla, un precio por metro y un impuesto final que añadir.
- **2. E - Entender (Separar datos):**
  - Largo $= 20$ m
  - Ancho $= 10$ m
  - Precio $= 5\,€$/metro
  - Impuesto $= 21\%$
  - Incógnita: Coste total final.
- **3. D - Descubrir las herramientas:**
  - Para rodear el huerto necesitamos el **Perímetro** (Geometría).
  - Para el coste multiplicamos metros por precio (Aritmética).
  - Para el impuesto usamos cálculo de porcentajes (Proporciones).
- **4. O - Operar:**
  - **Paso A: Calcular el perímetro del rectángulo.**

Sumamos los cuatro lados del huerto:

$$\text{Perímetro} = 20 + 10 + 20 + 10 = 60 \text{ metros}$$

  - **Paso B: Calcular el coste sin impuestos.**

Multiplicamos los 60 metros por $5\,€$:

$$60 \cdot 5 = 300\,€$$

  - **Paso C: Calcular y añadir el 21% de impuesto.**

💡 **Inciso pedagógico (Cálculo directo de porcentaje):** Para añadir un 21% directamente, multiplicamos por $1{,}21$. También podemos calcular el 21% de 300: $\frac{300 \cdot 21}{100} = 63\,€$.

Sumamos el precio base más el impuesto:

$$300 + 63 = 363\,€$$

- **5. C - Comprobar:**

Si la valla costaba $300\,€$, un impuesto del 21% (algo más de la quinta parte) son unos $60\,€$. $300 + 63 = 363\,€$ tiene todo el sentido lógico.

- **Resultado final:** $363\,€$ **en total.**

Ejercicio Resuelto 8.2

Corrige la siguiente simplificación algebraica encontrando el error:

$$A = 4x + 3x^2 - 2x + x^2$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar las familias de términos semejantes.**
  - Familia de las x sencillas (x^1): $+4x$ y $-2x$.
  - Familia de las x al cuadrado (x^2): $+3x^2$ y $+1x^2$.
- **Paso 2: Agrupar por familias separadas.**

💡 **Inciso pedagógico (No mezclar grados):** No puedes sumar $4x$ con $3x^2$ para hacer $7x^3$. Las x con exponente 1 son como manzanas y las x^2 son como piñas; solo se juntan las frutas iguales.

- **Paso 3: Operar cada grupo.**
  - Manzanas (x): $4x - 2x = 2x$
  - Piñas (x^2): $3x^2 + 1x^2 = 4x^2$
- **Paso 4: Escribir el polinomio ordenado de mayor a menor exponente.**

$$A = 4x^2 + 2x$$

- **Resultado final:** $4x^2 + 2x$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 8.1:** Un parque rectangular mide 50 metros de largo y 30 metros de ancho. Si un niño da 3 vueltas completas corriendo alrededor del parque, ¿cuántos metros recorre en total?

(Solución indicada: 480 metros*)*

2. **Propuesto 8.2:** Simplifica al máximo la siguiente expresión algebraica agrupando correctamente:

$$E = 7x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 8x - 10$$

(Solución indicada: $5x^2 + 3x - 7$*)*

3. **Propuesto 8.3:** Calcula el resultado de estas dos potencias con signo:

- a) $(-4)^2$
- b) -4^2

(Solución indicada: a) 16; b) -16)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 8.1

- **Enunciado:** Parque de 50 m $\times$ 30 m. Distancia de 3 vueltas.
- **Desarrollo:**
  1. *Perímetro de una sola vuelta:* Sumamos los 4 lados:

     $$\text{Perímetro} = 50 + 30 + 50 + 30 = 160 \text{ metros}$$

  2. *Distancia de 3 vueltas:* Multiplicamos el perímetro por 3:

     $$\text{Distancia total} = 160 \cdot 3 = 480 \text{ metros}$$

- **Resultado:** 480 metros

Solución del Propuesto 8.2

- **Enunciado:** $7x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 8x - 10$
- **Desarrollo:**
  1. *Juntamos los términos con x^2:* $7x^2 - 2x^2 = 5x^2$.
  2. *Juntamos los términos con x:* $-5x + 8x = +3x$.
  3. *Juntamos los números sin letra:* $+3 - 10 = -7$.
  4. *Unimos las tres partes:* $5x^2 + 3x - 7$.
- **Resultado:** $5x^2 + 3x - 7$

Solución del Propuesto 8.3

- **Enunciado:** a) $(-4)^2$; b) -4^2
- **Desarrollo:**
  1. *Caso a) Con paréntesis:* El exponente 2 abraza tanto al signo como al número:

     $$(-4) \cdot (-4) = +16$$

  2. *Caso b) Sin paréntesis:* El exponente 2 solo afecta al número 4, dejando el signo menos delante intacto:

     $$-(4 \cdot 4) = -16$$

- **Resultado: a)** 16**; b)** -16

📘 TEMA 9: EL MISTERIO DEL EXPONENTE DESCONOCIDO: POTENCIAS, RADICACIÓN Y LOGARITMOS

9.1. La Gran Familia de Tres Hermanos

Imagina una operación muy sencilla con tres protagonistas:

$$5^2 = 25$$

Aquí tenemos:

- **La Base ($B = 5$):** El número que se multiplica.
- **El Exponente ($E = 2$):** Cuántas veces se multiplica la base por sí misma.
- **El Resultado o Potencia ($P = 25$):** El premio final.

Esta misma relación familiar da lugar a **tres operaciones complementarias**, según qué dato tengamos y qué misterio queramos descubrir:

Operación	¿Qué datos conocemos?	¿Qué dato buscamos?	Ejemplo
1. Potenciación	La Base (5) y el Exponente (2)	El Resultado (P)	$5^2 = \mathbf{25}$
2. Radicación (Raíz)	El Resultado (25) y el Exponente (2)	La Base (B)	$\sqrt{25} = \mathbf{5}$
3. Logaritmo	La Base (5) y el Resultado (25)	El Exponente (E)	$\log_5(25) = \mathbf{2}$

9.2. ¿Qué es exactamente un Logaritmo?

La palabra suena complicada (viene del griego *logos*, que significa razón o cálculo, y *arithmos*, número), pero es una pregunta muy sencilla:

$$\log_{\text{base}}(\text{resultado}) = \text{exponente}$$

🗣️ Cómo se lee en voz alta:

$\log_2(8) = 3$ se lee: *«El logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3»*.

Pregunta que hace tu cerebro: *«¿A qué número tengo que elevar el 2 para que me dé 8?»*

Como $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (el 2 multiplicado tres veces), la respuesta es 3.

9.3. Propiedades Mágicas de los Logaritmos

Los logaritmos son como atajos que transforman cuentas difíciles en cuentas más fáciles:

1. **Logaritmo de un producto (Se convierte en suma):**

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$$

2. **Logaritmo de un cociente (Se convierte en resta):**

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$$

3. **Logaritmo de una potencia (El exponente baja a multiplicar):**

$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a(u)$$

4. **Logaritmo de la misma base:**

$$\log_a(a) = 1$$

(porque $a^1 = a$)

5. **Logaritmo de 1:**

$$\log_a(1) = 0$$

(porque cualquier número elevado a 0 es 1)

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 9.1

Calcula mentalmente el valor de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_3(81)$
- b) $\log_{10}(1000)$
- c) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a)** $\log_3(81)$**:**
    - Nos preguntamos: *«¿A qué número elevamos el 3 para que dé 81?»*

- Multiplicamos el 3 por sí mismo:
  - $3 \cdot 3 = 9$ (2 veces)
  - $9 \cdot 3 = 27$ (3 veces)
  - $27 \cdot 3 = 81$ (4 veces)
- Como $3^4 = 81$, el resultado es 4.

- **Apartado b)** $\log_{10}(1000)$**:**

💡 **Inciso pedagógico (Logaritmos decimales):** Cuando la base es 10, el resultado es simplemente contar cuántos ceros tiene el número.

- 1000 tiene tres ceros, y $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.
- Por tanto, $\log_{10}(1000) = \mathbf{3}$.

- **Apartado c)** $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$**:**

💡 **Inciso pedagógico (Leyes de potencias con exponentes negativos):** Recuerda que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- Sabemos que $2^2 = 4$.
- Para que el 4 pase al denominador como una fracción $\frac{1}{4}$, el exponente debe ser negativo: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.
- Por tanto, $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \mathbf{-2}$.

- **Resultado final: a)** 4**; b)** 3**; c)** -2

Ejercicio Resuelto 9.2

Aplica las propiedades para calcular la siguiente expresión como un único número:

$$E = \log_2(8) + \log_2(4) - \log_2(2)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Método 1: Calculando cada pieza por separado.**
  - $\log_2(8) = 3$ (porque $2^3 = 8$).
  - $\log_2(4) = 2$ (porque $2^2 = 4$).
  - $\log_2(2) = 1$ (porque $2^1 = 2$).
  - Juntamos: $E = 3 + 2 - 1 = 4$.
- **Método 2: Aplicando las propiedades de los logaritmos.**

- La suma de logaritmos de igual base se convierte en multiplicación: $\log_2(8 \cdot 4) = \log_2(32)$.
- La resta se convierte en división: $\log_2\left(\frac{32}{2}\right) = \log_2(16)$.
- Calculamos $\log_2(16)$: como $2^4 = 16$, el resultado es 4.

- **Resultado final:** 4

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 9.1:** Calcula el valor de los siguientes logaritmos inmediatos:
   - a) $\log_5(125)$
   - b) $\log_7(49)$
   - c) $\log_4(1)$

(Solución indicada: a) 3; b) 2; c) 0)

2. **Propuesto 9.2:** Resuelve la siguiente ecuación encontrando el valor de la incógnita x:

$$\log_3(x) = 3$$

(Solución indicada: $x = 27$)

3. **Propuesto 9.3:** Simplifica la siguiente expresión en un único valor numérico:

$$A = \log_{10}(100) + \log_{10}(10) - \log_{10}(1000)$$

(Solución indicada: 0)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 9.1

- **Enunciado:** a) $\log_5(125)$; b) $\log_7(49)$; c) $\log_4(1)$
- **Desarrollo:**
  1. *Apartado a:* Buscamos la potencia de 5: $5 \cdot 5 = 25 \rightarrow 25 \cdot 5 = 125 \Longrightarrow 5^3 = 125$. Luego $\log_5(125) = 3$.
  2. *Apartado b:* Buscamos la potencia de 7: $7 \cdot 7 = 49 \Longrightarrow 7^2 = 49$. Luego $\log_7(49) = 2$.
  3. *Apartado c:* Cualquier número elevado a 0 da 1 ($4^0 = 1$). Luego $\log_4(1) = 0$.
- **Resultado: a) 3; b) 2; c) 0**

Solución del Propuesto 9.2

- **Enunciado:** $\log_3(x) = 3$
- **Desarrollo:**
    1. *Convertir a forma de potencia:* Por la definición de logaritmo ($\text{Base}^{\text{Exponente}} = \text{Resultado}$), tenemos:
    $$3^3 = x$$
    2. *Calcular la potencia:* $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
- **Resultado:** $x = 27$

Solución del Propuesto 9.3

- **Enunciado:** $A = \log_{10}(100) + \log_{10}(10) - \log_{10}(1000)$
- **Desarrollo:**
    1. *Calculamos cada logaritmo en base 10 contando ceros:*
        - $\log_{10}(100) = 2$ (dos ceros: $10^2 = 100$)
        - $\log_{10}(10) = 1$ (un cero: $10^1 = 10$)
        - $\log_{10}(1000) = 3$ (tres ceros: $10^3 = 1000$)
    2. *Operamos:* $2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$.
- **Resultado:** 0

📘 TEMA 10: EL CLUB DE LOS NÚMEROS ESPECIALES: IRRACIONALES, EL NÚMERO π, EL NÚMERO e Y LA PROPORCIÓN ÁUREA (Φ)

10.1. ¿Qué es un Número Irracional? Los números infinitos sin patrón

Hasta ahora conocíamos números ordenados y tranquilos:

- Números enteros como el 4 o el -3.
- Fracciones como $\frac{1}{2} = 0{,}50$ o números con decimales que se repiten con un patrón fijo (como $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$). A todos estos los llamamos **Números Racionales** porque se pueden escribir como una fracción (una ración).

Pero existen unos números misteriosos llamados **Números Irracionales**:

- Tienen **infinitos decimales** después de la coma.
- Sus decimales **no siguen ningún patrón** ni se repiten en bucle.
- **¡Es totalmente imposible escribirlos como una fracción de dos números enteros!**

10.2. Los Tres Reyes del Club de los Irracionales

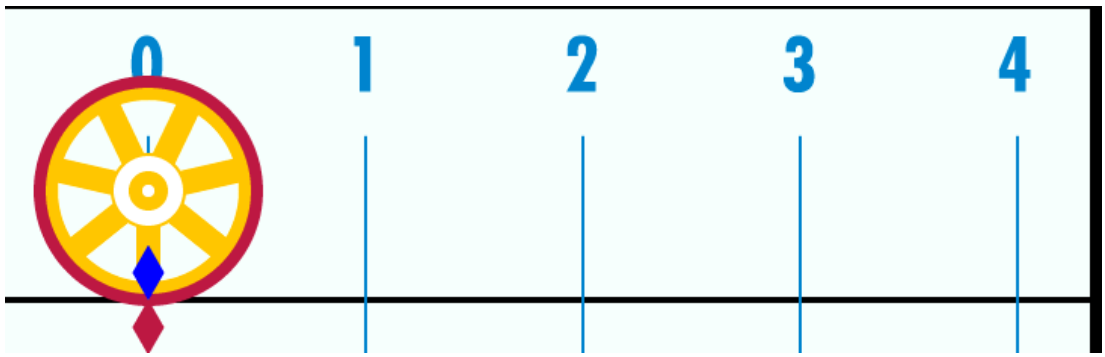
1. El Rey del Círculo: π (Pi $\approx 3,14159\ldots$)

- Es la relación mágica que hay en **cualquier rueda o círculo del universo** entre su borde exterior (longitud) y su ancho de lado a lado pasando por el centro (diámetro).
- Si coges una cuerda del tamaño del diámetro, cabe exactamente 3 **veces y un pedacito más (**$0{,}1416\ldots$**)** alrededor de la rueda.

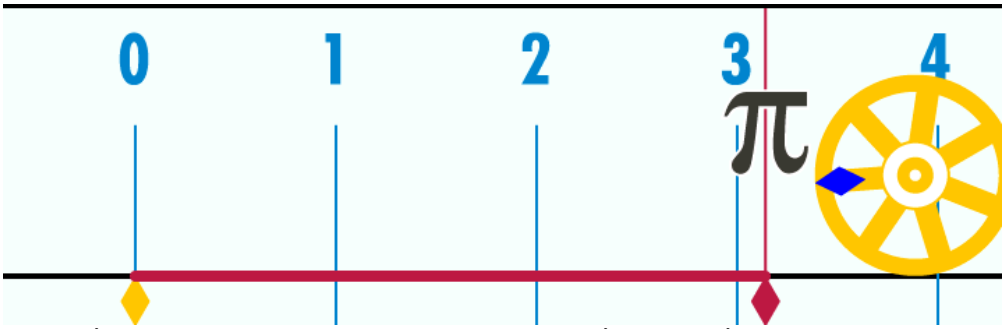
  π es el más famoso de los números irracionales. Es el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. No se puede expresar en forma de fracción.

	Fórmules
Expressió algebraica	$\pi = \frac{L}{D}$

Es una constante porque se repite, no importa el tamaño de la circunferencia que contemplemos. Tomamos por ejemplo la rueda de una bicicleta. Si hacemos una marca en la goma, ubicada en el centro exacto de la banda que toca el suelo,



y la hacemos rodar una vuelta entera hasta que coincida en el mismo punto de contacto con el suelo,



Animación del desenrollado de la circunferencia de un círculo de diámetro uno, para ilustrar la proporción de π.

resulta que la distancia que hemos recorrido es de 3,14 veces su anchura (=diámetro).

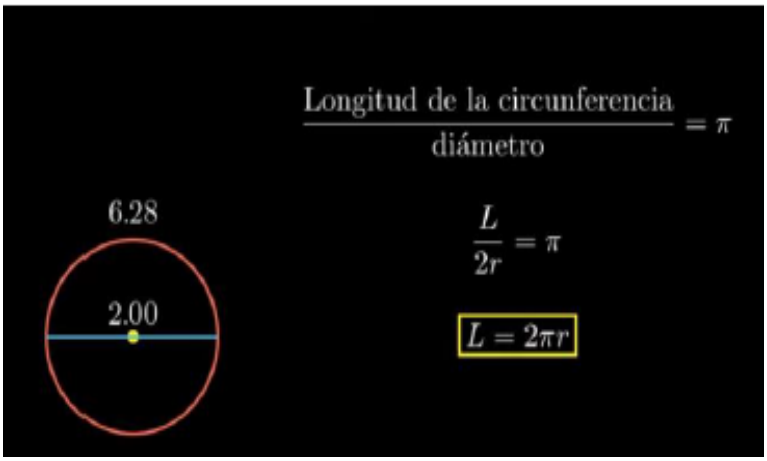
Y esto es así siempre. Da lo mismo que hablemos de la rueda de una bicicleta, la ruedecita de un monopatín, la enorme rueda de un autobús o la rueda de la noria de un parque de atracciones.

Dicho de otra manera

Los números irracionales no son aquellos que se hayan vuelto locos o tenido un ataque de nervios 🤣🤣🤣.

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

> El número irracional más conocido es PI (π), cuyo valor es 3,141592 … que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y que se expresa mediante la fórmula $P=2\times\pi\times R$, con lo que, para un radio igual a una unidad, el diámetro valdrá 2 unidades y el valor de π ascenderá a 6,28 unidades.

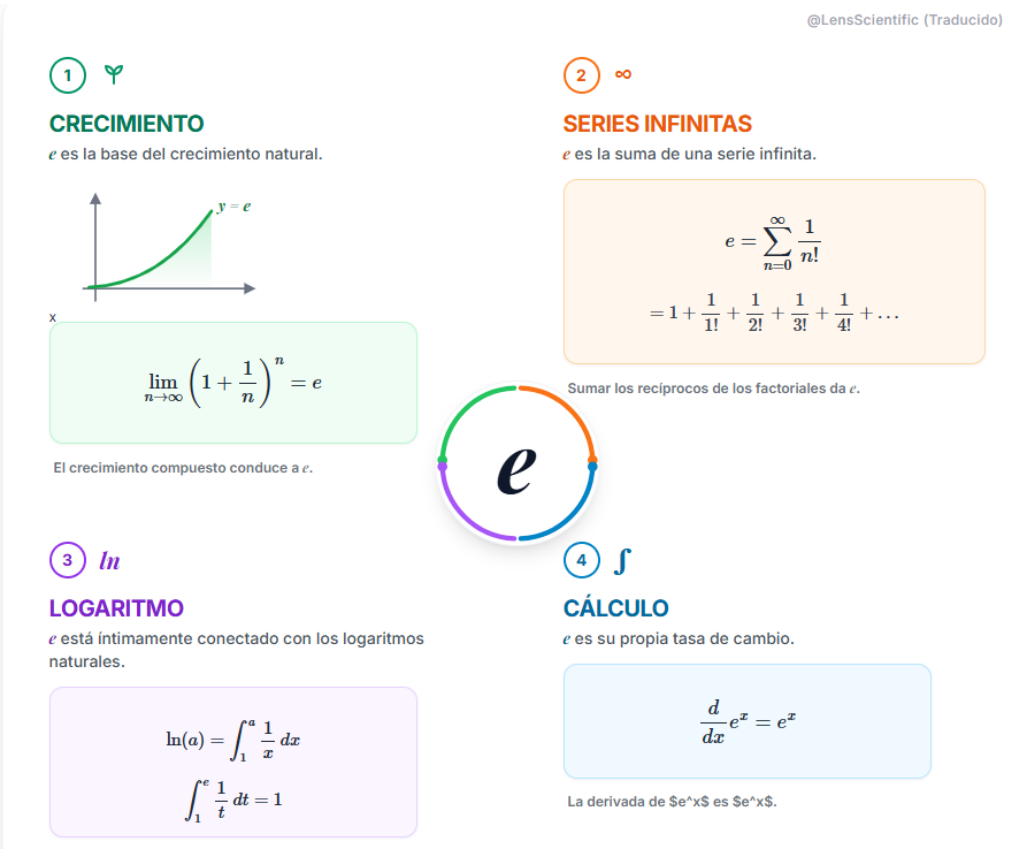


- **Fórmula de la longitud de la circunferencia:**

$$\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot R = \pi \cdot \text{Diámetro}$$

2. El Rey del Crecimiento: e ($e \approx 2,71828\ldots$)

- Se llama número de Euler o constante de Napier.
- Aparece siempre que algo crece de forma continua en la naturaleza: cómo crecen las bacterias en una placa de laboratorio, cómo se desintegran los átomos o cómo crecen los ahorros en un banco con interés compuesto.



3. La Proporción Divina y de la Belleza: Φ (Fi $\approx 1,61803\ldots$)

- Conocido como el **Número Áureo** o la proporción de oro.
- Se obtiene a partir del Teorema de Pitágoras dibujando un cuadrado de lado 1:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

- Los antiguos arquitectos griegos, pintores como Leonardo da Vinci y la propia naturaleza (los pétalos de los girasoles, las conchas de caracol y las galaxias) usan esta proporción porque crea figuras muy armónicas y agradables a la vista.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 10.1

La rueda de la bicicleta de Pablo tiene un radio de 30 cm. Si Pablo da 10 pedaleadas y cada pedaleada hace girar la rueda 1 vuelta completa, ¿cuántos centímetros avanza la bicicleta en total? (Usa $\pi \approx 3{,}14$).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar la fórmula del perímetro del círculo.** Queremos saber cuánto mide el borde de la rueda (la distancia que recorre en una sola vuelta).

$$\text{Longitud} = 2 \cdot \pi \cdot R$$

- **Paso 2: Sustituir los datos de 1 vuelta.**
  - Radio $R = 30$ cm
  - $\pi = 3{,}14$

$$\text{Longitud de 1 vuelta} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30$$

- **Paso 3: Realizar las multiplicaciones.**

💡 **Inciso pedagógico (Propiedad asociativa de la multiplicación):** Podemos multiplicar primero los números enteros para que sea más fácil: $2 \cdot 30 = 60$.

Luego multiplicamos por el número decimal:

$$60 \cdot 3{,}14 = 188{,}4 \text{ cm}$$

En una sola vuelta, la bicicleta avanza $188{,}4$ cm.

- **Paso 4: Calcular la distancia de las 10 vueltas.**

Multiplicamos la distancia de una vuelta por 10:

💡 **Inciso pedagógico (Multiplicar decimales por 10):** Al multiplicar por 10, simplemente movemos la coma un salto hacia la derecha: $188{,}4 \rightarrow 1884$.

$$\text{Distancia total} = 188{,}4 \cdot 10 = 1884 \text{ cm}$$

- **Resultado final:** 1884 cm **(o** $18{,}84$ metros**)**

Ejercicio Resuelto 10.2

Un pintor quiere construir un marco rectangular para un cuadro siguiendo la divina proporción áurea ($\Phi \approx 1{,}6$). Si el ancho del cuadro mide 50 cm, ¿cuántos centímetros debe medir de largo para que el cuadro tenga proporciones perfectas?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Entender la regla de la proporción áurea.** Para que un rectángulo sea áureo, su lado largo (L) dividido entre su lado corto (A) debe ser igual al número áureo (Φ):

$$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}} = 1{,}6$$

- **Paso 2: Sustituir el dato conocido y plantear la ecuación.**
  - Ancho $= 50$ cm
  - Largo $= X$

$$\frac{X}{50} = 1{,}6$$

- **Paso 3: Despejar la incógnita X.**

💡 **Inciso pedagógico (Despejar divisiones):** El número 50 está abajo dividiendo; pasa al otro lado del signo igual multiplicando.

$$X = 1{,}6 \cdot 50$$

- **Paso 4: Multiplicar.**

$$1{,}6 \cdot 50 = 80$$

- **Resultado final: El largo debe medir 80 cm.**

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 10.1:** Un plato de cocina circular tiene un diámetro de 20 cm (su radio es de 10 cm). Calcula la longitud de su borde exterior usando el valor aproximado $\pi \approx 3{,}14$.

(Solución indicada: $62{,}8$ cm*)*

2. **Propuesto 10.2:** Clasifica los siguientes números en dos cajas: la caja de los **Racionales** ($\mathbb{Q}$) y la caja de los **Irracionales** ($\mathbb{I}$):
    - a) $\frac{3}{4}$
    - b) $\sqrt{2}$
    - c) 7
    - d) π

(Solución indicada: Racionales: a, c; Irracionales: b, d)

3. **Propuesto 10.3:** Una tarjeta de biblioteca tiene forma de rectángulo áureo con un largo de 8 cm. Si el largo es $1{,}6$ veces su ancho, ¿cuánto mide el ancho de la tarjeta?

(Solución indicada: 5 cm*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 10.1

- **Enunciado:** Radio $R = 10$ cm, $\pi = 3{,}14$. Longitud del plato.
- **Desarrollo:**
    1. *Fórmula:* Longitud $= 2 \cdot \pi \cdot R$.
    2. *Sustitución:* Longitud $= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10$.
    3. *Cálculo:* $2 \cdot 10 = 20 \rightarrow 20 \cdot 3{,}14 = 62{,}8$ cm.
- **Resultado:** $62{,}8$ cm

Solución del Propuesto 10.2

- **Enunciado:** Clasificar $\frac{3}{4}$, $\sqrt{2}$, 7, π.
- **Desarrollo:**
    1. $\frac{3}{4}$*:* Es una fracción exacta $(0{,}75)$ → **Racional**.
    2. $\sqrt{2}$*:* Da $1{,}41421356\ldots$ con infinitos decimales sin patrón → **Irracional**.
    3. 7*:* Es un número natural y entero $(\frac{7}{1})$ → **Racional**.

4. π*:* No se puede poner como fracción ($3{,}14159\ldots$) → **Irracional**.

- **Resultado: Racionales:** $\frac{3}{4}$ **y** 7**; Irracionales:** $\sqrt{2}$ **y** π

Solución del Propuesto 10.3

- **Enunciado:** Largo $= 8$ cm, Proporción $= 1{,}6$. Hallar el Ancho (A).
- **Desarrollo:**
  1. *Relación:* Largo $= 1{,}6 \cdot$ Ancho $\Longrightarrow 8 = 1{,}6 \cdot A$.
  2. *Despeje de* A*:* Pasamos el $1{,}6$ dividiendo:

$$A = \frac{8}{1{,}6}$$

  3. *División:* Multiplicamos por 10 arriba y abajo para quitar la coma: $\frac{80}{16} = 5$.
- **Resultado:** 5 cm

📘 TEMA 11: EL SISTEMA DE MEDIDAS, LAS ESCALAS Y EL LENGUAJE DE LOS MAPAS

11.1. ¿Por qué necesitamos medir el mundo?

Imagina que vas a una carpintería y pides: *«Quiero una tabla que mida tres pasos de largo»*. Si el carpintero tiene las piernas más largas que tú, ¡la tabla no cabrá en tu habitación!

Para que todo el mundo hable el mismo idioma, la ciencia creó el **Sistema Internacional de Unidades (SI)**:

- **Longitud (Distancias):** La unidad reina es el **Metro (**m**)**.
- **Masa / Peso:** La unidad básica es el **Gramo (**g**)** o el **Kilogramo (**kg**)**.
- **Capacidad (Líquidos):** La unidad básica es el **Litro (**l**)**.
- **Tiempo:** La unidad básica es el **Segundo (**s**)**.

11.2. La Escalera de las Unidades (De 10 en 10)

Nuestro sistema de medidas funciona en **Base 10**:

Kilo (k) ↔ Hecto (h) ↔ Deca (da) ↔ **Unidad** ↔ deci (d) ↔ centi (c) ↔ mili (m)

- 🪜 **Si bajas la escalera:** Cada escalón que bajas, **multiplicas por** 10 (o añades un cero a la derecha).
    - Ejemplo: 1 metro $=10$ dm $=100$ cm $=1000$ mm.
- 🪜 **Si subes la escalera:** Cada escalón que subes, **divides entre** 10 (o mueves la coma un lugar a la izquierda).
    - Ejemplo: 500 cm $=50$ dm $=5$ metros.

11.3. Las Escalas: Cómo meter un país entero dentro de un papel

Un mapa de España o el plano de una casa no pueden medir kilómetros en la realidad; hay que dibujarlos en pequeño.

A esa proporción la llamamos **Escala**:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida en el papel}}{\text{Medida en la realidad}}$$

- Si ves una escala $1:100$: Significa que 1 cm en el papel representa 100 cm (1 metro) en el suelo real.
- Si ves una escala $1:70000$: Significa que 1 cm en el mapa equivale a 70000 cm (700 metros) en la montaña.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 11.1

Una botella de zumo contiene $1{,}5$ litros**. Si queremos servir vasos de** 250 mililitros **(**ml**), ¿cuántos vasos llenos podemos servir en total?**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Convertir todo a la misma unidad de medida.**

No podemos dividir litros entre mililitros directamente; debemos pasar los litros a mililitros bajando la escalera.

- De Litro a Decilitro ($\times 10$)
- De Decilitro a Centilitro ($\times 10$)
- De Centilitro a Mililitro ($\times 10$)
- En total bajamos 3 escalones: multiplicamos por 1000.

- **Paso 2: Realizar la conversión.**

$$1{,}5 \cdot 1000 = 1500 \text{ ml}$$

💡 **Inciso pedagógico (Mover la coma):** Para multiplicar $1{,}5$ por 1000, la coma da 3 saltos a la derecha: un salto para pasar el 5 y dos ceros adicionales ($1{,}5 \to 15 \to 150 \to 1500$).

- **Paso 3: Calcular el número de vasos (División).**

Dividimos el zumo total entre el tamaño de un vaso:

$$\text{N.º de vasos} = \frac{1500}{250}$$

  - Tachamos un cero arriba y abajo: $\frac{150}{25} = 6$.

- **Resultado final: Se pueden servir** 6 vasos completos**.**

Ejercicio Resuelto 11.2

En un mapa de senderismo con escala $1:50000$**, la distancia medida con una regla entre un refugio y una cascada es de** 4 cm**. ¿Cuántos kilómetros separan el refugio de la cascada en el bosque real?**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Entender el significado de la escala** $1:50000$**.**

Cada centímetro en el papel equivale a 50000 cm en la realidad.

- **Paso 2: Calcular la distancia real en centímetros.**

Multiplicamos los 4 cm de la regla por 50000:

$$4 \cdot 50000 = 200000 \text{ cm}$$

- **Paso 3: Convertir centímetros a metros y luego a kilómetros (Subir la escalera).**

  - Para pasar de centímetros a metros, subimos 2 escalones (dividimos entre 100):

$$200000 \div 100 = 2000 \text{ metros}$$

  - Para pasar de metros a kilómetros, subimos 3 escalones (dividimos entre 1000):

$$2000 \div 1000 = 2 \text{ kilómetros}$$

- **Resultado final: La distancia real es de** 2 kilómetros**.**

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 11.1:** Una cuerda de saltar mide $2{,}4$ metros. ¿Cuántos centímetros (cm) mide la cuerda?

(Solución indicada: 240 cm*)*

2. **Propuesto 11.2:** Un saco contiene 3 kg de harina. Si usamos 600 g para hacer un bizcocho, ¿cuántos gramos de harina quedan todavía en el saco?

(Solución indicada: 2400 gramos*)*

3. **Propuesto 11.3:** En el plano de un dormitorio dibujado a escala $1:100$, una cama mide 2 cm de largo. ¿Cuántos metros mide la cama en la realidad?

(Solución indicada: 2 metros*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 11.1

- **Enunciado:** Convertir $2{,}4$ metros a centímetros.
- **Desarrollo:**
    1. *Escalera:* De metro a centímetro hay 2 escalones hacia abajo ($\times 100$).
    2. *Cálculo:* $2{,}4 \cdot 100 = 240$ cm.
- **Resultado:** 240 cm

Solución del Propuesto 11.2

- **Enunciado:** Saco de 3 kg, gastamos 600 g. Gramos restantes.
- **Desarrollo:**
    1. *Conversión de* kg *a* g*:* 1 kg $= 1000$ g $\Longrightarrow 3$ kg $= 3000$ g.
    2. *Resta:* 3000 g $- 600$ g $= 2400$ g.
- **Resultado:** 2400 gramos

Solución del Propuesto 11.3

- **Enunciado:** Escala $1:100$, medida en plano $= 2$ cm. Metros reales.
- **Desarrollo:**
    1. *Cálculo en centímetros:* 2 cm $\cdot 100 = 200$ cm en la realidad.
    2. *Conversión a metros:* 200 cm $\div 100 = 2$ metros.
- **Resultado:** 2 metros

📘 TEMA 12: EL DETECTIVE CON DOS PISTAS: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

12.1. ¿Qué es un Sistema de Ecuaciones? Dos misterios y dos pistas

Hasta ahora teníamos problemas con un solo misterio (una incógnita, como la letra x). Pero a veces en la vida tenemos **dos misterios diferentes al mismo tiempo**: por ejemplo, el precio de un lápiz (x) y el precio de un cuaderno (y).

Para resolver dos misterios, necesitamos **dos pistas completas** (dos ecuaciones unidas en un sistema):

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Resolver el sistema significa encontrar una pareja de números (x, y) que haga que **las dos pistas sean verdad a la vez**.

12.2. Los Tres Métodos Mágicos para Resolver Sistemas

1. Método de Sustitución (El Espía Infiltrado)

1. Despejamos (dejamos sola) una letra en la ecuación más fácil.
2. Metemos esa expresión en la otra ecuación como un espía infiltrado.
3. Resolvemos la ecuación de una sola letra que nos queda.

2. Método de Igualación (El Espejo)

1. Dejamos sola a la **misma letra** en las dos ecuaciones.
2. Como las dos expresiones son iguales a la misma letra, las ponemos mirándose frente a frente con un signo igual ($=$).
3. Despejamos la letra restante.

3. Método de Reducción (La Batalla de las Letras)

1. Multiplicamos una o las dos ecuaciones por números estratégicos para que una letra quede con el mismo número pero con signos opuestos (por ejemplo, $+2y$ y $-2y$).
2. Sumamos las dos ecuaciones en vertical: ¡la letra elegida se anula y desaparece!
3. Despejamos la letra superviviente.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 12.1

Resuelve el siguiente sistema mediante el Método de Sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Despejar una letra en la primera ecuación. Tomamos $x + y = 7$ y dejamos sola a la x pasando la y restando al otro lado:

$$x = 7 - y$$

- Paso 2: Infiltrar la expresión en la segunda ecuación. En la ecuación $2x + 3y = 18$, cambiamos la letra x por el paquete $(7 - y)$:

$$2(7 - y) + 3y = 18$$

- Paso 3: Resolver la ecuación con la propiedad distributiva.

💡 **Inciso pedagógico (Propiedad distributiva):** El 2 multiplica a todos los números que están dentro del paréntesis: $2 \cdot 7 = 14$ y $2 \cdot (-y) = -2y$.

$$14 - 2y + 3y = 18$$

- Paso 4: Juntar letras y despejar.
  - Operamos las y: $-2y + 3y = +1y = y$.
  - Pasamos el 14 restando a la derecha:

$$y = 18 - 14$$

$$y = 4$$

- Paso 5: Descubrir el valor de la primera letra (x). Volvemos a la fórmula del primer paso $(x = 7 - y)$ y sustituimos $y = 4$:

$$x = 7 - 4 = 3$$

- Paso 6: Comprobación de seguridad.
  - Ecuación 1: $3 + 4 = 7$ *(¡Correcto!)*
  - Ecuación 2: $2(3) + 3(4) = 6 + 12 = 18$ *(¡Correcto!)*
- **Resultado final:** $x = 3, \quad y = 4$

Ejercicio Resuelto 12.2

Problema de la vida real resuelto con Sistemas (Método de Reducción):

En una juguetería, 2 coches teledirigidos y 1 robot cuestan $20\,€$. En la misma tienda, 2 coches y 3 robots cuestan $36\,€$. ¿Cuánto cuesta un solo coche (x) y cuánto cuesta un robot (y)?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Plantear el sistema de ecuaciones.
  - $x =$ precio de un coche
  - $y =$ precio de un robot

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases}$$

- Paso 2: Preparar la batalla de reducción. Vemos que ambas ecuaciones tienen $2x$. Para que se anulen al sumar, multiplicamos toda la primera ecuación por -1 (cambiando todos sus signos):

$$\begin{cases} -2x - y = -20 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases}$$

- Paso 3: Sumar las dos ecuaciones en vertical.
  - Con las x: $-2x + 2x = 0$ *(¡las x se eliminan!)*
  - Con las y: $-y + 3y = 2y$
  - Con los números: $-20 + 36 = 16$

Nos queda una ecuación directa:

$$2y = 16$$

- Paso 4: Despejar el precio del robot (y).

$$y = \frac{16}{2} = 8\,€$$

- Paso 5: Hallar el precio del coche (x). Sustituimos $y = 8$ en la primera ecuación ($2x + y = 20$):

$$2x + 8 = 20$$

$$2x = 20 - 8$$

$$2x = 12 \Longrightarrow x = \frac{12}{2} = 6\,€$$

- **Resultado final: Un coche cuesta $6\,€$ y un robot cuesta $8\,€$.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 12.1:** Resuelve el siguiente sistema por el método que prefieras:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(Solución indicada: $x = 7, \quad y = 5$*)*

2. **Propuesto 12.2:** Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

(Solución indicada: $x = 3, \quad y = 7$*)*

3. **Propuesto 12.3:** En una granja hay gallinas (2 patas) y conejos (4 patas). Contamos 10 cabezas en total y 28 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

(Solución indicada: 6 gallinas y 4 conejos*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 12.1

- **Enunciado:** $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$
- **Desarrollo:**
  1. *Reducción directa:* Sumamos las dos ecuaciones en vertical:

$$(x + x) + (y - y) = 12 + 2 \Longrightarrow 2x = 14$$

  2. *Despejar* x*:* $x = \frac{14}{2} = 7$.
  3. *Hallar* y*:* Sustituimos en la primera ecuación: $7 + y = 12 \Longrightarrow y = 12 - 7 = 5$.
- **Resultado:** $x = 7, \quad y = 5$

Solución del Propuesto 12.2

- **Enunciado:** $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$
- **Desarrollo:**
  1. *Igualar las dos expresiones de* y*:*

$$2x + 1 = 3x - 2$$

  2. *Agrupar* x *y números:*

$$1 + 2 = 3x - 2x \Longrightarrow 3 = x \Longrightarrow x = 3$$

3. *Calcular y:* Sustituimos en la primera fórmula:

$$y = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$$

- **Resultado:** $x = 3, \quad y = 7$

Solución del Propuesto 12.3

- **Enunciado:** $g =$ gallinas, $c =$ conejos. Cabezas $= 10$, Patas $= 28$.
- **Desarrollo:**

1. *Plantear el sistema:*

$$\begin{cases} g + c = 10 & \text{(cabezas)} \\ 2g + 4c = 28 & \text{(patas)} \end{cases}$$

2. *Método de sustitución:* Despejamos $g = 10 - c$.
3. *Sustituimos en las patas:*

$$2(10 - c) + 4c = 28 \Longrightarrow 20 - 2c + 4c = 28$$

4. *Operamos:* $20 + 2c = 28 \Longrightarrow 2c = 28 - 20 = 8 \Longrightarrow c = \frac{8}{2} =$ 4 conejos.
5. *Gallinas:* $g = 10 - 4 = 6$ gallinas.

- **Resultado:** 6 gallinas y 4 conejos

📘 TEMA 13: EL VIAJE DE LAS LÍNEAS RECTAS: VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

13.1. ¿Qué es un Vector? La flecha con superpoderes

En el tema 4 aprendimos a situar puntos en el plano cartesiano como si fuera un mapa del tesoro: (x, y). Pero en el mundo real las cosas no solo están quietas, ¡también se mueven!

Para representar el movimiento de un avión, el viento o la fuerza con la que chutas un balón, usamos un **Vector**:

- Es una **flecha orientada** que empieza en un punto A(origen) y termina en un punto B(extremo).

- **Tiene tres superpoderes:**

1. **Módulo (Longitud o tamaño):** Cuánto mide la flecha (cuánta fuerza o distancia tiene).

2. **Dirección:** La recta sobre la que está colocada la flecha (inclinada, horizontal o vertical).

3. **Sentido:** Hacia dónde apunta la punta de la flecha (hacia arriba, hacia la derecha, etc.).

13.2. ¿Cómo se calculan las componentes de un Vector?

Si una flecha va desde el punto $A(x_1, y_1)$hasta el punto $B(x_2, y_2)$, para averiguar cuánto avanza en horizontal (v_x) y cuánto sube en vertical (v_y), solo tenemos que **restar el punto final menos el punto inicial**:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$$

📏 **El Módulo del Vector (El Teorema de Pitágoras al rescate):**

Para saber cuánto mide de largo la flecha completa ($|\vec{v}|$), usamos a nuestro viejo amigo Pitágoras:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + \left(v_y\right)^2}$$

13.3. La Ecuación de la Línea Recta: $y = mx + n$

Cualquier camino recto en el plano cartesiano sigue una regla matemática que une a todos sus puntos:

$$y = mx + n$$

- m **es la Pendiente (La cuesta de la montaña):**

Nos dice lo inclinada que está la recta.

  - Si $m > 0$, la recta es una subida (creciente).
  - Si $m < 0$, la recta es una bajada (decreciente).
  - Si $m = 0$, la recta es un suelo completamente plano (horizontal).

- **$n$es la Ordenada en el origen (El punto de salida):**

Nos dice la altura exacta en la que la recta corta al eje vertical Y(es el punto $(0, n)$).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 13.1

Un barco sale del puerto situado en el punto $A(1,2)$y navega en línea recta hasta una isla situada en el punto $B(4,6)$.

- a) Halla las componentes del vector de viaje $\overrightarrow{AB}$.
- b) Calcula la distancia total recorrida (el módulo del vector).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$:**
  - Restamos las coordenadas de la isla (B) menos las del puerto (A):

$$v_x = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3$$

$$v_y = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4$$

  - El vector de desplazamiento es:

$$\overrightarrow{AB} = (3,4)$$

- 💡 **Inciso pedagógico (¿Qué significa $(3,4)$?):** Significa que para ir del puerto a la isla, el barco ha tenido que avanzar 3unidades hacia la derecha y subir 4unidades hacia arriba en el mapa.
-
- **Apartado b) Calcular la distancia total (Módulo $|\overrightarrow{AB}|$):**
  - Aplicamos la fórmula del módulo con el Teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

- Sustituimos las componentes 3y 4:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

- Calculamos los cuadrados: $3^2 = 9$y $4^2 = 16$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

- Resolvemos la raíz: $\sqrt{25} = 5$(porque $5 \cdot 5 = 25$).

- **Resultado final: a)** $\overrightarrow{AB} = (3,4)$**; b) Distancia** $= 5$ unidades

Ejercicio Resuelto 13.2

Dada la recta $y = 2x + 1$**:**

- a) ¿Cuánto vale su pendiente (m) y qué tipo de cuesta tiene?
- b) ¿En qué punto corta al eje vertical Y?
- c) Si avanzamos hasta $x = 3$, ¿a qué altura (y) llegaremos?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Pendiente:**
  - Miramos el número que acompaña a la x: $m = 2$.
  - Como 2es positivo $(m > 0)$, la recta es una **cuesta hacia arriba (creciente)**. Por cada paso que avanzas a la derecha, subes 2escalones.
- **Apartado b) Punto de corte con el eje** Y**:**
  - Miramos el número suelto: $n = 1$.
  - La recta corta al eje Yen la altura 1, es decir, en el punto $(0,1)$.
- **Apartado c) Calcular la altura para** $x = 3$**:**
  - Sustituimos la $x$por el número 3en la ecuación de la fábrica mágica:

$$y = 2(3) + 1$$

- Multiplicamos y sumamos: $2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6 + 1 = 7$.
- Llegaremos a la altura $y = 7$(el punto es $(3,7)$).

- **Resultado final: a)** $m = 2$**(creciente); b) Corta en** $(0,1)$**; c) Altura** $y = 7$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 13.1:** Un dron vuela desde el punto de inicio $A(2,3)$hasta el punto de aterrizaje $B(8,11)$. Halla las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$y calcula la distancia volada (su módulo).

(Solución indicada: $\overrightarrow{AB} = (6,8)$*; Distancia* $= 10$ unidades*)*

2. **Propuesto 13.2:** Identifica la pendiente (m) y el punto de corte con el eje $Y(n)$ de la siguiente recta:

$$y = -3x + 5$$

(Solución indicada: Pendiente $m = -3$*(decreciente/bajada); Corte en* $(0,5)$*)*

3. **Propuesto 13.3:** Si una recta pasa por el punto de salida $(0,2)$y tiene una pendiente $m = 4$, escribe su ecuación y calcula qué valor tiene $y$cuando $x = 2$.

(Solución indicada: Ecuación $y = 4x + 2$*; Para* $x = 2$*,* $y = 10$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 13.1

- **Enunciado:** Origen $A(2,3)$, Extremo $B(8,11)$.

- **Desarrollo:**
  1. *Componentes del vector:* Restamos extremo menos origen:

$$v_x = 8 - 2 = 6$$

$$v_y = 11 - 3 = 8$$

$$\overrightarrow{AB} = (6,8)$$

2. *Módulo del vector:*

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

- **Resultado:** $\overrightarrow{AB} = (6,8)$**; Módulo** $= 10$

Solución del Propuesto 13.2

- **Enunciado:** $y = -3x + 5$
- **Desarrollo:**
  1. *Forma general:* Comparamos con $y = mx + n$.
  2. *Pendiente:* El coeficiente de $x$es $m = -3$. Al ser negativo, es una recta que baja.
  3. *Ordenada en el origen:* El término independiente es $n = 5$, por lo que corta al eje vertical en el punto $(0,5)$.
- **Resultado:** $m = -3$**, Corte en** $(0,5)$

Solución del Propuesto 13.3

- **Enunciado:** Punto de salida $(0,2) \Longrightarrow n = 2$; Pendiente $m = 4$.
- **Desarrollo:**
  1. *Escribir la ecuación:* Sustituimos my $n$en la fórmula $y = mx + n$:

$$y = 4x + 2$$

  2. *Evaluar en* $x = 2$*:*

$$y = 4(2) + 2 = 8 + 2 = 10$$

- **Resultado: Ecuación:** $y = 4x + 2$**; Para** $x = 2$**,** $y = 10$

📘 TEMA 14: EL ARTE DE REPARTIR Y DESCOMPONER: DIVISIBILIDAD, M.C.D. Y m.c.m.

14.1. ¿Qué es la Divisibilidad? Hacer grupitos exactos sin que sobre nada

Imagina que tienes una bolsa con 12 **caramelos** y quieres compartirlos con tus amigos:

- Si sois 3 **amigos**, le tocan 4 **caramelos** a cada uno y no sobra ninguno. Decimos que 12 es **divisible entre** 3.
- Si sois 5 **amigos**, le tocan 2 a cada uno, pero sobran 2 caramelos sueltos. Entonces 12 **no es divisible entre** 5.

🌟 **Números Primos (Los Bloques LEGO fundamentales):**

Son números especiales que solo se pueden dividir de forma exacta entre el número 1 y entre ellos mismos.

Los primeros números primos son: $2,3,5,7,11,13,17,19\ldots$

Todos los demás números del mundo se construyen multiplicando estos bloques primos (descomposición en factores primos).

14.2. ¿Cómo Descomponer un Número en Factores Primos?

Ponemos una barra vertical y vamos dividiendo solo entre números primos hasta llegar al 1:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Por tanto, el número 60 se escribe como: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

14.3. El Duelo de Gigantes: ¿m.c.m. o M.C.D.?

Aunque sus nombres parecen trabalenguas engañosos, cada uno tiene una misión secreta en la vida real:

1. **m.c.m. (Mínimo Común Múltiplo) → El Rey de las Coincidencias:**
    - **¿Cuándo se usa?** Cuando nos preguntan por cosas que **se repiten en el tiempo** y queremos saber **cuándo volverán a coincidir** (ejemplo: luces de semáforo, visitas al médico, carreras).
    - **Regla mágica:** Tomamos los factores primos **comunes y no comunes elevados al MAYOR exponente**.
    - *(El resultado siempre será un número más grande o igual que los iniciales)*.

2. **M.C.D. (Máximo Común Divisor) → El Rey del Reparto Justo:**
    - **¿Cuándo se usa?** Cuando queremos **cortar, dividir o repartir en trozos iguales lo más grandes posibles** sin que sobre nada (ejemplo: cortar cuerdas, hacer paquetes de regalo).
    - **Regla mágica:** Tomamos solo los factores primos **comunes elevados al MENOR exponente**.
    - *(El resultado siempre será un número más pequeño o igual que los iniciales)*.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 14.1

Problema de coincidencia (m.c.m.):

Dos faros de la costa parpadean de noche. El primer faro emite un destello cada 6 segundos y el segundo faro cada 8 segundos. Si a las 10:00 de la noche coinciden encendiéndose a la vez, ¿cuántos segundos tardarán en volver a encenderse juntos?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el tipo de problema.**

Nos preguntan por un suceso que se repite en el tiempo y queremos saber cuándo vuelven a coincidir. Por tanto, debemos calcular el **m.c.m.**.

- Paso 2: Descomponer ambos números en factores primos.
    - Para el 6: $6 \div 2 = 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1 \Longrightarrow 6 = 2 \cdot 3$
    - Para el 8: $8 \div 2 = 4 \rightarrow 4 \div 2 = 2 \rightarrow 2 \div 2 = 1 \Longrightarrow 8 = 2^3$
- Paso 3: Aplicar la regla del m.c.m. (Mayores exponentes).
    - Entre 2^1 y 2^3, elegimos el mayor: 2^3.
    - El factor 3 no es común, pero en el m.c.m. también entra: 3^1.

$$\text{m.c.m.}(6,8) = 2^3 \cdot 3$$

- **Paso 4: Calcular el resultado numérico.**

💡 **Inciso pedagógico (Calcular potencias):** $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

$$8 \cdot 3 = 24$$

- **Resultado final: Tardarán** 24 segundos **en volver a coincidir.**

Ejercicio Resuelto 14.2

Problema de reparto exacto (M.C.D.):

Un carpintero tiene dos listones de madera: uno mide 12 metros y el otro 18 metros. Quiere cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, sin que sobre ningún pedazo de madera.

- a) ¿Cuánto debe medir cada trozo cortado?
- b) ¿Cuántos trozos obtendrá en total?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el tipo de problema.**

Queremos cortar o dividir en partes iguales lo más grandes posibles. Debemos calcular el **M.C.D.**.

- Paso 2: Descomponer en factores primos.
  - Para el 12: $12 = 2^2 \cdot 3$
  - Para el 18: $18 \div 2 = 9 \rightarrow 9 \div 3 = 3 \rightarrow 3 \div 3 = 1 \Longrightarrow 18 = 2 \cdot 3^2$
- Paso 3: Aplicar la regla del M.C.D. (Solo comunes con menor exponente).
  - Entre 2^2 y 2^1, elegimos el menor: 2^1.
  - Entre 3^1 y 3^2, elegimos el menor: 3^1.

$$\text{M.C.D.}(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$$

- **Paso 4: Responder a las dos preguntas.**
  - a) Cada trozo debe medir 6 metros.
  - b) Calculamos cuántos trozos salen:
    - Del listón de 12 m: $12 \div 6 = 2$ trozos.
    - Del listón de 18 m: $18 \div 6 = 3$ trozos.
    - Total de trozos: $2 + 3 = 5$ trozos.
- **Resultado final: a) Cada trozo medirá** 6 metros**; b) Obtendrá** 5 trozos en total**.**

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 14.1:** Descompón en factores primos los siguientes dos números:
    - a) 45
    - b) 100

(Solución indicada: a) $3^2 \cdot 5$*; b)* $2^2 \cdot 5^2$*)*

2. **Propuesto 14.2:** Marta toma su jarabe cada 4 horas y su pastilla cada 6 horas. Si se toma ambas medicinas juntas a las 8:00 de la mañana, ¿dentro de cuántas horas volverá a tomárselas al mismo tiempo?

(Solución indicada: 12 horas*)*

3. **Propuesto 14.3:** Tenemos 20 bombones de chocolate blanco y 30 de chocolate negro. Queremos hacer cajas de regalo idénticas con el mayor número de bombones posible sin mezclar ni que sobre ninguno. ¿Cuántos bombones tendrá cada caja?

(Solución indicada: 10 bombones por caja*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 14.1

- **Enunciado:** Descomponer 45 y 100.
- **Desarrollo:**
    1. 45*:* No termina en par, probamos entre 3: $45 \div 3 = 15 \rightarrow 15 \div 3 = 5 \rightarrow 5 \div 5 = 1 \Longrightarrow 45 = 3^2 \cdot 5$.
    2. 100*:* $100 \div 2 = 50 \rightarrow 50 \div 2 = 25 \rightarrow 25 \div 5 = 5 \rightarrow 5 \div 5 = 1 \Longrightarrow 100 = 2^2 \cdot 5^2$.
- **Resultado: a)** $3^2 \cdot 5$**; b)** $2^2 \cdot 5^2$

Solución del Propuesto 14.2

- **Enunciado:** Jarabe cada 4 h, pastilla cada 6 h. Próxima coincidencia.
- **Desarrollo:**
    1. *Identificación:* Problema de coincidencia temporal → m.c.m.
    2. *Descomposición:* $4 = 2^2$; $6 = 2 \cdot 3$.
    3. *Cálculo del m.c.m.:* Comunes y no comunes al mayor exponente → $\text{m.c.m.}(4,6) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$.

- **Resultado: Volverán a coincidir dentro de** 12 horas**.**

Solución del Propuesto 14.3

- **Enunciado:** 20 blancos y 30 negros en cajas iguales con el máximo posible.
- **Desarrollo:**
  1. *Identificación:* Problema de reparto máximo → M.C.D.
  2. *Descomposición:* $20 = 2^2 \cdot 5$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
  3. *Cálculo del M.C.D.:* Solo factores comunes al menor exponente → M.C.D.$(20{,}30) = 2^1 \cdot 5^1 = 10$.
- **Resultado: Cada caja tendrá** 10 bombones**.**

📘 TEMA 15: OPERACIONES CON POLINOMIOS Y EL ATAJO DE RUFFINI

15.1. ¿Qué es un Polinomio? Una familia de monomios

En el tema 3 aprendimos que las letras representan números escondidos.

- **Monomio:** Es un único paquete formado por un número y una o varias letras multiplicándose (por ejemplo: $5x^2$).
- **Polinomio:** Es una cadena o familia de varios monomios unidos mediante sumas y restas (por ejemplo: $4x^3 + 2x^2 - 5x + 7$).
- **Grado de un polinomio:** Es el exponente más grande que tenga la letra x. En $4x^3 + 2x$, el grado es **3**.

15.2. Sumar y Restar Polinomios: Cada oveja con su pareja

Para sumar o restar polinomios, solo juntamos los términos que tengan **exactamente la misma letra y el mismo exponente** (términos semejantes):

- Las x^2se suman únicamente con las x^2.
- Las $x$se suman únicamente con las x.

- Los números sueltos se suman con los números sueltos.

⚠️ **Resta de Polinomios:** Para restar dos polinomios, le cambiamos el signo a **todos los términos del segundo polinomio** y luego sumamos normal.

15.3. Multiplicación de Polinomios: Todos contra todos

Cada pieza del primer polinomio debe multiplicarse por **cada una de las piezas del segundo polinomio**:

- Se multiplican los signos con la regla de los signos.
- Se multiplican los números.
- **Se suman los exponentes de las letras con la misma base:** $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

15.4. El Atajo Mágico de Paolo Ruffini (División Rápida)

Dividir polinomios largos puede ser pesado. Pero cuando dividimos un polinomio entre algo sencillo de la forma $(x - a)$o $(x + a)$, podemos usar la **Regla de Ruffini**:

1. Dibujamos una cruz grande.
2. Arriba colocamos solo los **coeficientes (números)** del polinomio ordenados de mayor a menor grado. *(Si falta algún grado intermedio, ponemos un* 0*)*.
3. En la esquina izquierda colocamos el número divisor **cambiándole el signo** (si era $x - 2$, ponemos $+2$).
4. Bajamos el primer número, multiplicamos por la esquina, sumamos en vertical y repetimos hasta el final.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 15.1

Dados los polinomios:

$$P(x) = 3x^2 + 5x - 4$$

$$Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

- a) Calcula la suma: $P(x) + Q(x)$
- b) Calcula la resta: $P(x) - Q(x)$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Suma $P(x) + Q(x)$:**
  - Juntamos los términos con x^2: $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$.
  - Juntamos los términos con x: $+5x - 3x = +2x$.
  - Juntamos los números sueltos: $-4 + 1 = -3$.
  - Expresión final de la suma:

$$5x^2 + 2x - 3$$

- **Apartado b) Resta $P(x) - Q(x)$:**
  - **Paso 1:** Escribimos el primer polinomio: $3x^2 + 5x - 4$.
  - **Paso 2:** Cambiamos el signo a todas las piezas de $Q(x)$:

$$-Q(x) = -2x^2 + 3x - 1$$

  - **Paso 3:** Agrupamos y sumamos:
    - Términos x^2: $3x^2 - 2x^2 = 1x^2 = x^2$.

- Términos x: $+5x + 3x = +8x$.

- Números sueltos: $-4 - 1 = -5$.

  - Expresión final de la resta:

$$x^2 + 8x - 5$$

- **Resultado final: a)** $5x^2 + 2x - 3$**; b)** $x^2 + 8x - 5$

Ejercicio Resuelto 15.2

Aplica la Regla de Ruffini para resolver la siguiente división:

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Preparar los números.**
  - Coeficientes del dividendo: $2,\ -3,\ -5,\ 6$.
  - En la esquina izquierda colocamos el divisor con signo cambiado: como tenemos $(x - 2)$, ponemos $+2$.

- **Paso 2: Dibujar la tabla y operar paso a paso.**

$$\begin{array}{rcccc} & 2 & -3 & -5 & 6 \\ +2 & & 4 & 2 & -6 \\ \backslash hline & 2 & 1 & -3 & \mathbf{0} \end{array}$$

  - **1.** Bajamos el primer número: 2.
  - **2.** Multiplicamos por la esquina: $2 \cdot (+2) = 4$. Lo colocamos debajo del -3.
  - **3.** Sumamos en vertical: $-3 + 4 = \mathbf{1}$.
  - **4.** Multiplicamos por la esquina: $1 \cdot (+2) = 2$. Lo colocamos debajo del -5.
  - **5.** Sumamos en vertical: $-5 + 2 = \mathbf{-3}$.
  - **6.** Multiplicamos por la esquina: $-3 \cdot (+2) = -6$. Lo colocamos debajo del 6.

- **7.** Sumamos en vertical: $6 - 6 = \mathbf{0}$.

- **Paso 3: Interpretar el resultado.**

💡 **Inciso pedagógico (Bajar un grado al polinomio):** Como empezamos con un polinomio de grado $3(x^3)$, el cociente resultante empieza en grado $2(x^2)$.

- El **Cociente** es: $2x^2 + 1x - 3 = 2x^2 + x - 3$.
- El **Resto** es el último número: 0(es una división exacta).

- **Resultado final: Cociente** $= 2x^2 + x - 3$**; Resto** $= 0$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 15.1:** Realiza la multiplicación de los siguientes binomios término a término:

$$(2x + 3)(x - 4)$$

(Solución indicada: $2x^2 - 5x - 12$*)*

2. **Propuesto 15.2:** Usa la Regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de la siguiente división:

$$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) \div (x - 2)$$

(Solución indicada: Cociente $= x^2 + 4x + 4$*; Resto* $= 0$*)*

3. **Propuesto 15.3:** Aplica Ruffini para la división $(3x^2 - 5x + 4) \div (x + 1)$. *(¡Recuerda cambiar el signo al divisor en la esquina!)*

(Solución indicada: Cociente $= 3x - 8$*; Resto* $= 12$*)*

📖 **SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS**

Solución del Propuesto 15.1

- **Enunciado:** $(2x + 3)(x - 4)$

- **Desarrollo:**

1. *Multiplicamos* $2x$*por todo el segundo paréntesis:*

$$2x \cdot x - 2x \cdot 4 = 2x^2 - 8x$$

2. *Multiplicamos* $+3$*por todo el segundo paréntesis:*

$$3 \cdot x - 3 \cdot 4 = 3x - 12$$

3. *Juntamos todos los términos:*

$$2x^2 - 8x + 3x - 12$$

4. *Reducimos términos semejantes* $(-8x + 3x = -5x)$*:*

$$2x^2 - 5x - 12$$

- **Resultado:** $2x^2 - 5x - 12$

Solución del Propuesto 15.2

- **Enunciado:** $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) \div (x - 2)$

- **Desarrollo:**

1. *Tabla de Ruffini:* Coeficientes: $1{,}2{,}-4{,}-8$. Esquina: $+2$.

	1	2	-4	-8
$+2$		2	8	8
$\backslash hline$	1	4	4	$\mathbf{0}$

2. *Lectura:* Cociente $= 1x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$; Resto $= 0$.

- **Resultado: Cociente** $= x^2 + 4x + 4$**; Resto** $= 0$

Solución del Propuesto 15.3

- **Enunciado:** $(3x^2 - 5x + 4) \div (x + 1)$
- **Desarrollo:**

1. *Esquina:* Al tener $(x + 1)$, colocamos -1.

2. *Tabla de Ruffini:* Coeficientes: $3{,}-5{,}4$.

$$\begin{array}{rccc} & 3 & -5 & 4 \\ -1 & & -3 & 8 \\ \hline & 3 & -8 & \mathbf{12} \end{array}$$

3. *Lectura:* Cociente $= 3x - 8$; Resto $= 12$.

- **Resultado: Cociente** $= 3x - 8$**; Resto** $= 12$

📘 TEMA 16: EL SALTO A LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS: ECUACIONES DE 2.º GRADO Y LA FÓRMULA DE BHASKARA

16.1. ¿Qué es una Ecuación de Segundo Grado?

En el tema 3 aprendimos a despejar ecuaciones sencillas donde la $x$estaba elevada a 1(ecuaciones de 1.º grado).

Pero a veces la incógnita $x$se multiplica por sí misma y aparece como x^2. A estas ecuaciones las llamamos **Ecuaciones de Segundo Grado** o **Cuadráticas**:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- a**(Coeficiente principal):** Es el número que acompaña a la x^2. *(¡Nunca puede ser* 0*, porque entonces no sería de 2.º grado!)*

- b**(Coeficiente lineal):** Es el número que acompaña a la $x$sencilla.

- c**(Término independiente):** Es el número que está solo, sin ninguna letra.

✌️ La Gran Diferencia:

Mientras que una ecuación de primer grado tiene una única solución, las ecuaciones de segundo grado **pueden tener hasta 2 soluciones diferentes** (las llamamos x_1y x_2).

16.2. La Llave Maestra: La Fórmula General de Bhaskara

Para resolver cualquier ecuación completa de segundo grado, el matemático indio Bhaskara nos dejó una fórmula mágica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **El símbolo $\pm$(Más / Menos):** Nos indica el momento en que el camino se divide en dos para encontrar las dos soluciones: una sumando $(+)$ y otra restando $(-)$.

- **El Discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):** Es lo que está dentro de la raíz cuadrada:
  - Si da un número **positivo (> 0)**: ¡Hay **2 soluciones reales** distintas!
  - Si da **cero ($= 0$)**: Hay **1 única solución doble**.
  - Si da un número **negativo (< 0)**: **No tiene solución real** (porque no podemos calcular la raíz cuadrada de un número negativo).

16.3. Ecuaciones Incompletas: Los Atajos Rápidos

No siempre es necesario usar la fórmula larga si faltan piezas:

1. **Si falta la c ($ax^2 + bx = 0$):** Sacamos factor común a la x:

$$x(ax + b) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0 \quad \text{o} \quad ax + b = 0$$

2. **Si falta la b ($ax^2 + c = 0$):** Despejamos directamente la x^2 y hacemos la raíz cuadrada:

$$x^2 = \frac{-c}{a} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 16.1

Resuelve la siguiente ecuación completa de segundo grado:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar los tres coeficientes (a, b, c).**
  - $a = 1$(el 1invisible que multiplica a x^2)
  - $b = -5$(el número que acompaña a la $x$con su signo)
  - $c = 6$(el número suelto)
- Paso 2: Escribir y sustituir en la fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

💡 **Inciso pedagógico (Cuidado con los signos):**

  - $-b$significa "el opuesto de b": como $b = -5$, $-(-5)$se convierte en $+5$.

  - En $(-5)^2$, al estar entre paréntesis y al cuadrado, el resultado siempre es positivo: $(-5) \cdot (-5) = +25$.

- **Paso 3: Calcular el interior de la raíz (el discriminante).**
  - Multiplicamos: $4 \cdot 1 \cdot 6 = 24$.
  - Restamos dentro de la raíz: $25 - 24 = 1$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

  - Como $\sqrt{1} = 1$:

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

- **Paso 4: Separar los dos caminos con el $\pm$.**
  - **Primer camino (sumando):**

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

- **Segundo camino (restando):**

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Resultado final:** $x_1 = 3, \quad x_2 = 2$

Ejercicio Resuelto 16.2

Resuelve la siguiente ecuación incompleta mediante factor común:

$$2x^2 - 8x = 0$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar que falta el término independiente ($c = 0$).** No hace falta aplicar la fórmula larga; aplicamos el atajo de sacar factor común.

- Paso 2: Sacar factor común a la x(y al número 2).

💡 **Inciso pedagógico (Sacar factor común):** Buscamos lo que tienen en común ambos términos. Los dos tienen la letra xy se pueden dividir entre 2:

$$2x(x-4) = 0$$

- **Paso 3: Razonar las dos soluciones.** Para que una multiplicación de dos cosas dé como resultado 0, al menos una de las dos piezas tiene que valer cero:
  - **Primera pieza:** $2x = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{0}{2} = 0.$
  - **Segunda pieza:** $x - 4 = 0 \Longrightarrow x_2 = 4.$

- **Resultado final:** $x_1 = 0, \quad x_2 = 4$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 16.1:** Resuelve mediante la fórmula de Bhaskara la siguiente ecuación:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

(Solución indicada: $x_1 = 4, \quad x_2 = 3$*)*

2. **Propuesto 16.2:** Resuelve la siguiente ecuación incompleta:

$$x^2 - 25 = 0$$

(Solución indicada: $x_1 = 5, \quad x_2 = -5$*)*

3. **Propuesto 16.3:** Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación sacando factor común:

$$3x^2 - 9x = 0$$

(Solución indicada: $x_1 = 0, \quad x_2 = 3$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 16.1

- **Enunciado:** $x^2 - 7x + 12 = 0$
- **Desarrollo:**
    1. *Identificación:* $a = 1, b = -7, c = 12$.
    2. *Fórmula:*

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

    3. *Raíz:* $\sqrt{49 - 48} = \sqrt{1} = 1$.
    4. *Separación:*
        - $x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$
        - $x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
- **Resultado:** $x_1 = 4, \quad x_2 = 3$

Solución del Propuesto 16.2

- **Enunciado:** $x^2 - 25 = 0$
- **Desarrollo:**
    1. *Despejar* x^2*:* Pasamos el -25sumando al otro lado: $x^2 = 25$.

2. *Aplicar raíz cuadrada:* $x = \pm\sqrt{25}$.
3. *Soluciones:* Como $5 \cdot 5 = 25$y $(-5) \cdot (-5) = 25$, obtenemos $+5$y -5.

- **Resultado:** $x_1 = 5, \quad x_2 = -5$

Solución del Propuesto 16.3

- **Enunciado:** $3x^2 - 9x = 0$
- **Desarrollo:**
  1. *Sacar factor común* $3x$*:*
  $$3x(x - 3) = 0$$
  2. *Primera solución:* $3x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$.
  3. *Segunda solución:* $x - 3 = 0 \Longrightarrow x_2 = 3$.

- **Resultado:** $x_1 = 0, \quad x_2 = 3$

📘 TEMA 17: EL MUNDO DE LAS DESIGUALDADES: INECUACIONES Y FRONTERAS NUMÉRICAS

17.1. ¿Qué es una Inecuación? La balanza desequilibrada

Hasta ahora trabajábamos con ecuaciones, donde los dos platos de la balanza pesaban exactamente lo mismo y usábamos el signo igual (=).

En una **Inecuación**, la balanza está **desinclinada o desigual**: un lado pesa más que el otro. En vez de un signo =, usamos los **símbolos de orden**:

- $>$ **(Mayor que):** El lado izquierdo es más grande que el derecho.
- $<$ **(Menor que):** El lado izquierdo es más pequeño que el derecho.
- $\geq$ **(Mayor o igual que):** El lado izquierdo es más grande o exactamente igual.

- $\leq$ **(Menor o igual que):** El lado izquierdo es más pequeño o exactamente igual.

🏹 **El Truco de Ramón para no liarse con $>$ y $<$:**

Dibuja mentalmente una raya vertical en la parte abierta del símbolo y léelo como una flecha:

- Si a $>$ le pones una raya, parece una flecha a la derecha ($\rightarrow$), que significa **«Mayor que»**.
- Si a $<$ le pones una raya, parece una flecha a la izquierda ($\leftarrow$), que significa **«Menor que»**.

17.2. ¿Cómo se Resuelve una Inecuación? La Regla del Espejo Secreto

Las inecuaciones se despejan casi igual que las ecuaciones normales (pasando lo que suma a restar y lo que multiplica a dividir).

¡Pero hay una única regla de oro súper importante!

⚠️ **La Gran Alarma:**

Si multiplicas o divides toda la inecuación por un **número negativo ($-$)**, el símbolo de la desigualdad **se da la vuelta por completo**.

- El $>$ se convierte en $<$
- El $<$ se convierte en $>$

(Ejemplo: Si $-2x < 6$, al pasar el -2 dividiendo, el símbolo gira: $x > \frac{6}{-2} \Rightarrow x > -3$)

17.3. La Solución: No es un solo número, ¡es una piscina entera de números!

En una ecuación como $x = 3$, la solución es un único punto en la recta.

En una inecuación como $x > 3$, la solución son **todos los números del mundo mayores que 3** ($3.1, 4, 5, 100, 1000 \ldots$). Se puede escribir de tres formas:

1. **Forma algebraica:** $x > 3$
2. **Forma de intervalo:** $(3, +\infty)$ *(usamos paréntesis redondo porque el 3 no entra)*
3. **Forma gráfica:** Dibujamos una recta numérica y pintamos todo el camino desde el 3 hacia la derecha con un circulito abierto en el 3.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 17.1

Resuelve la siguiente inecuación de primer grado:

$$3x + 5 \leq 17$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Mover los números sin letra a la derecha.**

El $+5$ está sumando; pasa restando al otro lado manteniendo el símbolo $\leq$ intacto:

$$3x \leq 17 - 5$$

- **Paso 2: Calcular la resta.**

$$17 - 5 = 12$$

$$3x \leq 12$$

- **Paso 3: Despejar la x.**

El 3 está multiplicando de forma positiva, así que pasa dividiendo **sin cambiar la orientación del símbolo**:

$$x \leq \frac{12}{3}$$

$$x \leq 4$$

- **Paso 4: Escribir e interpretar la solución.**

💡 **Inciso pedagógico (Comprender la solución):** La respuesta $x \leq 4$ significa que cualquier número menor o igual que 4 sirve (por ejemplo, si pruebas con $x = 0$, $3(0) + 5 = 5 \leq 17$, ifunciona perfectamente!).

  - **En intervalo:** $(-\infty, 4]$ *(el corchete* $[\ldots]$ *indica que el* 4 *sí está incluido)*.

- **Resultado final:** $x \leq 4$ **(Intervalo:** $(-\infty, 4]$**)**

Ejercicio Resuelto 17.2

Resuelve aplicando la regla del cambio de sentido:

$$-2x + 4 < 10$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Mover el término numérico a la derecha.**

Pasamos el $+4$ restando:

$$-2x < 10 - 4$$

$$-2x < 6$$

- **Paso 2: Despejar la x pasando un número negativo a dividir.**

💡 **Inciso pedagógico (Giro del símbolo por signo negativo):** Como vamos a dividir entre -2 (un número negativo), el símbolo $<$ da un giro completo y se transforma en $>$.

$$x > \frac{6}{-2}$$

- **Paso 3: Realizar la división con regla de signos.**

$6 \div (-2) = -3$ (positivo entre negativo da negativo).

$$x > -3$$

- **Resultado final:** $x > -3$ **(Intervalo:** $(-3, +\infty)$**)**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 17.1:** Resuelve la siguiente inecuación básica:

$$2x - 3 \geq 7$$

(Solución indicada: $x \geq 5$)

2. **Propuesto 17.2:** Resuelve prestando atención a los números negativos:

$$-4x \leq 12$$

(Solución indicada: $x \geq -3$)

3. **Propuesto 17.3:** Resuelve la inecuación con incógnitas en ambos lados:

$$5x - 2 > 2x + 7$$

(Solución indicada: $x > 3$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 17.1

- **Enunciado:** $2x - 3 \geq 7$
- **Desarrollo:**

1. Pasamos el -3 sumando: $2x \geq 7 + 3 \Longrightarrow 2x \geq 10$.
2. Pasamos el 2 dividiendo: $x \geq \frac{10}{2} \Longrightarrow x \geq 5$.

- **Resultado:** $x \geq 5$ **(Intervalo:** $[5, +\infty)$**)**

Solución del Propuesto 17.2

- **Enunciado:** $-4x \leq 12$
- **Desarrollo:**
  1. *Dividir entre número negativo:* Pasamos el -4 dividiendo y giramos el símbolo $\leq$ a $\geq$:
  $$x \geq \frac{12}{-4}$$
  2. Cálculo de signos: $12 \div (-4) = -3$.
- **Resultado:** $x \geq -3$ **(Intervalo:** $[-3, +\infty)$**)**

Solución del Propuesto 17.3

- **Enunciado:** $5x - 2 > 2x + 7$
- **Desarrollo:**
  1. Agrupamos las x a la izquierda: $5x - 2x > 7 + 2$.
  2. Operamos cada lado: $3x > 9$.
  3. Despejamos: $x > \frac{9}{3} \Longrightarrow x > 3$.
- **Resultado:** $x > 3$ **(Intervalo:** $(3, +\infty)$**)**

📘 TEMA 18: EL COMPORTAMIENTO DE LAS FUNCIONES: DOMINIO, RECORRIDO, CONTINUIDAD Y LÍMITES

18.1. La Máquina de Funciones: Dominio y Recorrido

En temas anteriores vimos que una función es como una máquina: tú introduces un valor de x(entrada) y la máquina calcula y expulsa un valor de y(salida).

- **Dominio (**$\mathrm{Dom}\, f$**):** Es el conjunto de todos los números que **sí podemos meter** en la máquina sin que se rompa.

- ⚠️ *¿Cuándo se rompe la máquina?*

  1. Si intentamos **dividir entre cero** (como $\frac{1}{0}$, que da infinito o indefinido).

  2. Si intentamos calcular la **raíz cuadrada de un número negativo** (como $\sqrt{-4}$, que no existe dentro de los números reales).

- **Recorrido o Imagen ($\mathrm{Im}\, f$):** Es el conjunto de todos los valores de $y$que la máquina puede producir a la salida.

18.2. ¿Qué es una Función Continua? El Dibujo sin Levantar el Lápiz

Una función es **continua** si puedes dibujar toda su gráfica sobre el papel de un solo trazo, **sin tener que levantar el lápiz en ningún momento**.

Si la gráfica tiene un salto, un agujero o se corta por una división entre cero, decimos que la función es **discontinua** en ese punto exacto.

18.3. La Idea Intuitiva de Límite y el Taxista Gamberro

Un **límite** nos dice hacia qué altura (y) se acerca una función cuando nos vamos aproximando más y más a un valor concreto de x:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

🚕 La Metáfora del Taxista Gamberro:

Imagina que ves un taxi detenido y corres a subirte. Cuando estás a un paso de la puerta, el taxista avanza unos metros más. Corres otra vez, y justo antes de tocarlo, vuelve a adelantarse. Y así para siempre.

Aunque nunca consigues tocar la puerta del taxi, puedes ver con total claridad hacia qué lugar exacto se está dirigiendo. ¡Eso es exactamente un límite! **Acercarse infinitamente a un punto sin necesidad de pisarlo directamente**.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 18.1

Halla el Dominio de la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{5}{x-3}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Detectar la zona de peligro.**

Tenemos una fracción donde la incógnita $x$está en el denominador (abajo).

💡 **Inciso pedagógico (División prohibida):** En matemáticas nunca se puede dividir entre 0. Por tanto, la máquina funcionará bien con todos los números del mundo, excepto con aquel valor de x que haga que el denominador sea igual a cero.

- **Paso 2: Plantear y resolver la ecuación del peligro.**

Igualamos el denominador a cero para descubrir el número prohibido:

$$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

- **Paso 3: Escribir el Dominio.**

El único número que rompe la función es el 3. Todos los demás números reales ($\mathbb{R}$) son bienvenidos.

$$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{o bien} \quad (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

- **Resultado final:** $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Ejercicio Resuelto 18.2

Calcula el siguiente límite directo:

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 1)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Evaluar por sustitución directa.**

Como este polinomio no tiene fracciones con denominadores cero ni raíces cuadradas, es continuo en todas partes. Podemos sustituir la $x$directamente por el número al que nos acercamos (2).

- Paso 2: Sustituir y respetar la jerarquía PEMDAS.

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-4x+1)=3(2)^2-4(2)+1$$

- Paso 3: Resolver potencias, multiplicaciones y sumas.
    - Calculamos el cuadrado: $2^2=4$.
    - Multiplicamos: $3\cdot 4=12$y $4\cdot 2=8$.
    - Expresión resultante: $12-8+1$.
    - Operamos de izquierda a derecha: $12-8=4\to 4+1=5$.
- **Resultado final:** $\lim_{x\to 2}(3x^2-4x+1)=5$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 18.1:** Halla el dominio de la función $f(x)=\frac{x+2}{x-7}$.

(Solución indicada: $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}\setminus\{7\}$*)*

2. **Propuesto 18.2:** Calcula el límite mediante sustitución directa:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)$$

(Solución indicada: 7*)*

3. **Propuesto 18.3:** ¿Para qué valor de $x$la función $g(x)=\frac{8}{2x-6}$presenta una discontinuidad (división entre cero)?

(Solución indicada: $x=3$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 18.1

- **Enunciado:** $f(x)=\frac{x+2}{x-7}$

- **Desarrollo:**

    1. *Identificar el denominador:* La condición para que exista la fracción es que el denominador sea distinto de cero: $x - 7 \neq 0$.

    2. *Despejar:* $x \neq 7$.

    3. *Dominio:* Son todos los números reales excepto el 7.

- **Resultado:** $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{7\}$

Solución del Propuesto 18.2

- **Enunciado:** $\lim_{x \to 3}(2x^2 - 5x + 4)$

- **Desarrollo:**

    1. *Sustitución directa de* $x = 3$*:*

    $$2(3)^2 - 5(3) + 4$$

    2. *Potencia:* $3^2 = 9$.

    3. *Multiplicaciones:* $2 \cdot 9 = 18$y $5 \cdot 3 = 15$.

    4. *Operación final:* $18 - 15 + 4 = 3 + 4 = 7$.

- **Resultado:** 7

Solución del Propuesto 18.3

- **Enunciado:** Punto de discontinuidad de $g(x) = \frac{8}{2x-6}$

- **Desarrollo:**

    1. *Condición de corte:* Igualamos el denominador a cero para hallar el valor prohibido:

    $$2x - 6 = 0$$

    2. *Despeje:* $2x = 6 \Longrightarrow x = \frac{6}{2} = 3$.

- **Resultado:** $x = 3$

📘 TEMA 19: REGLAS AVANZADAS DE DERIVACIÓN: PRODUCTO, COCIENTE Y RADICALES

19.1. Cuando las Funciones se Multiplican: La Regla del Producto

En el tema 5 aprendimos la regla de la potencia ($x^n \to nx^{n-1}$). Pero en el mundo real, muchas funciones van de la mano multiplicándose: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$.

⚠️ La Trampa Mortal:

¡Jamás derives cada trozo y los multipliques directamente!

Si multiplicas $u' \cdot v'$, el resultado estará completamente mal.

Para resolver una multiplicación usamos la **Regla del Baile por Parejas**:

- El primer bailarín se cansa y **deriva**, mientras el segundo se queda **quieto**.
- **Sumamos (+)**.
- Ahora el primero se queda **quieto**, mientras el segundo se pone a **derivar**.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

19.2. Cuando las Funciones se Dividen: La Regla del Cociente

Cuando tenemos una fracción con letras arriba y abajo, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, usamos una fórmula muy parecida a la anterior, pero con dos cambios fundamentales:

1. En medio hay una **resta (−)**.

2. Todo el resultado queda dividido entre **el de abajo al cuadrado**.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

🗣️ **Cómo memorizarlo como una canción:**

«Derivada del de arriba por el de abajo sin derivar, MENOS el de arriba sin derivar por la derivada del de abajo, TODO dividido por el de abajo al cuadrado».

19.3. El Atajo Mágico para Derivar Raíces Cuadradas

Para derivar una raíz como $\sqrt{v}$, podemos convertirla en potencia fraccionaria ($v^{1/2}$) y aplicar la regla de la cadena. Pero hay una **fórmula directa** que ahorra la mitad de los pasos:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{v}\right) = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$$

- **Arriba:** Colocamos la derivada de lo que está dentro de la raíz (v').

- **Abajo:** Escribimos un 2 multiplicando a la misma raíz original ($2\sqrt{v}$).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 19.1

Calcula la derivada del siguiente producto de funciones:

$$f(x) = (2x + 3) \cdot (x^2 - 1)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar y derivar a cada bailarín por separado.

- Primera pieza (u): $u = 2x + 3 \Longrightarrow u' = 2$

- Segunda pieza (v): $v = x^2 - 1 \Longrightarrow v' = 2x$

- Paso 2: Aplicar la fórmula del producto: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$f'(x) = 2 \cdot (x^2 - 1) + (2x + 3) \cdot (2x)$$

- Paso 3: Aplicar la propiedad distributiva para abrir paréntesis.

  - Para el primer bloque: $2 \cdot x^2 - 2 \cdot 1 = 2x^2 - 2$.

  - Para el segundo bloque: $2x \cdot 2x + 3 \cdot 2x = 4x^2 + 6x$.

$$f'(x) = 2x^2 - 2 + 4x^2 + 6x$$

- Paso 4: Juntar los términos semejantes y ordenar.

  - Términos x^2: $2x^2 + 4x^2 = 6x^2$.

  - Términos x: $+6x$.
  - Números sueltos: -2.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 2$$

- **Resultado final:** $f'(x) = 6x^2 + 6x - 2$

Ejercicio Resuelto 19.2

Calcula la derivada aplicando el atajo directo de la raíz cuadrada:

$$y = \sqrt{7x^2 + 2x - 3}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar lo que hay dentro de la raíz (v).

$$v = 7x^2 + 2x - 3$$

- Paso 2: Derivar la pieza de dentro (v').
    - Derivada de $7x^2$: $2 \cdot 7x = 14x$.
    - Derivada de $2x$: 2.
    - Derivada de -3: 0.

$$v' = 14x + 2$$

- Paso 3: Aplicar la fórmula $\frac{v'}{2\sqrt{v}}$.

$$y' = \frac{14x + 2}{2\sqrt{7x^2 + 2x - 3}}$$

- Paso 4: Simplificar sacando factor común al número 2arriba.

💡 **Inciso pedagógico (Simplificación de fracciones algebraicas):** En el numerador sacamos factor común 2: $14x + 2 = 2(7x + 1)$.

Como hay un 2 multiplicando arriba y un 2 multiplicando abajo, se anulan entre sí:

$$y' = \frac{2(7x+1)}{2\sqrt{7x^2+2x-3}} = \frac{7x+1}{\sqrt{7x^2+2x-3}}$$

- **Resultado final:** $y' = \frac{7x+1}{\sqrt{7x^2+2x-3}}$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 19.1:** Deriva el siguiente producto de polinomios:

$$f(x) = (3x^2) \cdot (2x-5)$$

(Solución indicada: $f'(x) = 18x^2 - 30x$*)*

2. **Propuesto 19.2:** Aplica la regla del cociente para derivar:

$$g(x) = \frac{2x}{x+1}$$

(Solución indicada: $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$*)*

3. **Propuesto 19.3:** Usa el atajo de la raíz para calcular la derivada de:

$$y = \sqrt{9x^2+10x-2}$$

(Solución indicada: $y' = \frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x-2}}$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 19.1

- **Enunciado:** $f(x) = (3x^2) \cdot (2x-5)$
- **Desarrollo:**
  1. *Identificación:* $u = 3x^2 \Rightarrow u' = 6x$; $v = 2x-5 \Rightarrow v' = 2$.

2. *Fórmula del producto:* $f'(x) = u'v + uv'$.

$$f'(x) = (6x)(2x - 5) + (3x^2)(2)$$

3. *Propiedad distributiva:*

$$f'(x) = 12x^2 - 30x + 6x^2$$

4. *Reducir semejantes:* $12x^2 + 6x^2 = 18x^2 \Longrightarrow f'(x) = 18x^2 - 30x$.

- **Resultado:** $f'(x) = 18x^2 - 30x$

Solución del Propuesto 19.2

- **Enunciado:** $g(x) = \frac{2x}{x+1}$
- **Desarrollo:**

1. *Identificación:* $u = 2x \Longrightarrow u' = 2$; $v = x + 1 \Longrightarrow v' = 1$.

2. *Fórmula del cociente:* $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$g'(x) = \frac{2(x+1) - (2x)(1)}{(x+1)^2}$$

3. *Operar el numerador:*

$$2x + 2 - 2x = 2$$

4. *Resultado fraccionario:* $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

- **Resultado:** $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

Solución del Propuesto 19.3

- **Enunciado:** $y = \sqrt{9x^2 + 10x - 2}$

- **Desarrollo:**

1. *Identificación interior:* $v = 9x^2 + 10x - 2 \Longrightarrow v' = 18x + 10$.

2. *Fórmula de la raíz:* $y' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$.

$$y' = \frac{18x + 10}{2\sqrt{9x^2 + 10x - 2}}$$

3. *Sacar factor común* 2*arriba y simplificar:*

$$y' = \frac{2(9x + 5)}{2\sqrt{9x^2 + 10x - 2}} = \frac{9x + 5}{\sqrt{9x^2 + 10x - 2}}$$

- **Resultado:** $y' = \frac{9x+5}{\sqrt{9x^2+10x-2}}$

📘 TEMA 20: TÉCNICAS AVANZADAS DE INTEGRACIÓN Y CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE CURVAS

20.1. El Juego del Cambio de Variable (Integración por Sustitución)

En el tema 6 aprendimos las integrales inmediatas más sencillas (como $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$). Pero a veces nos encontramos con funciones empaquetadas dentro de otras funciones.

Para resolverlas, usamos el truco del **Cambio de Variable** (o sustitución):

1. Elegimos un paquete complicado de dentro y lo llamamos con una nueva letra: u.
2. Calculamos la derivada de ese paquete: du.
3. Cambiamos todas las x y dx antiguas por las nuevas u y du.
4. La integral se transforma en una operación elemental muy fácil de resolver.
5. Al final, volvemos a poner la x en su sitio (deshacemos el cambio).

20.2. La Fórmula Mágica: Integración por Partes

Cuando tenemos dos funciones multiplicándose que no se pueden simplificar fácilmente (por ejemplo, un polinomio por una exponencial o por un seno), recurrimos a la **Integración por Partes**:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

🐮 El Truco Mnemotécnico para Recordar la Fórmula:

*«**U**n **D**ía **V**i **U**na **V**aca **V**estida **D**e **U**niforme»*

- u**:** Elegimos la función que al derivarla se haga más sencilla (normalmente polinomios).
- dv**:** Elegimos la parte que sea fácil de integrar directamente.

20.3. El Área Encerrada Entre Dos Curvas (El Techo y el Suelo)

Cuando dos funciones se cruzan en un gráfico, dejan atrapada un área entre ellas. Para calcular esa superficie exacta mediante la Regla de Barrow, seguimos tres pasos:

1. **Buscar los puntos de corte:** Igualamos las dos funciones ($f(x) = g(x)$) para encontrar dónde se cruzan (límites de integración a y b).
2. **Descubrir quién es el Techo y quién es el Suelo:** Miramos qué función pasa por arriba (f_{techo}) y cuál pasa por abajo (g_{suelo}).
3. **Restar y Calcular la Integral:**

$$\text{Área} = \int_a^b \left(f_{\text{techo}}(x) - g_{\text{suelo}}(x)\right)\ dx$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 20.1

Calcula la siguiente integral mediante el método de cambio de variable:

$$\int 2x \cdot (x^2 + 1)^3\ dx$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Elegir la variable u.**

Llamamos u a la pieza que está dentro del paréntesis:

$$u = x^2 + 1$$

- **Paso 2: Derivar para encontrar du.**

Derivamos u respecto a x:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Longrightarrow du = 2x\,dx$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprobar la pieza que encaja):**
Observa que fuera del paréntesis tenemos exactamente $2x\,dx$. Esa pieza se sustituye directamente por du.

- **Paso 3: Escribir la integral con la nueva letra u.**

$$\int (x^2 + 1)^3 \cdot (2x\,dx) = \int u^3\ du$$

- **Paso 4: Resolver la integral inmediata en u.**

Aplicamos la regla de la potencia: subimos un grado al exponente y dividimos entre el nuevo exponente:

$$\int u^3\ du = \frac{u^{3+1}}{3+1} + C = \frac{u^4}{4} + C$$

- **Paso 5: Deshacer el cambio volviendo a la x.**

Cambiamos la letra u por su valor original $(x^2 + 1)$:

$$\frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C$$

- **Resultado final:** $\frac{(x^2+1)^4}{4} + C$

Ejercicio Resuelto 20.2

Calcula el área exacta encerrada entre la parábola $f(x) = -x^2 + 4$ (el techo) y el eje horizontal $g(x) = 0$ (el suelo) entre los puntos de corte $x = -2$ y $x = 2$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Plantear la integral del área (Techo menos Suelo).**

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} [(-x^2 + 4) - 0]\ dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\ dx$$

- **Paso 2: Encontrar la función primitiva $F(x)$.**

Integramos término a término:

- Integral de $-x^2$: $-\frac{x^3}{3}$
- Integral de $+4$: $+4x$

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$$

- **Paso 3: Evaluar en el límite superior ($x = 2$).**

$$F(2) = -\frac{2^3}{3} + 4(2) = -\frac{8}{3} + 8$$

Convertimos el 8 en fracción de tercios ($8 = \frac{24}{3}$):

$$F(2) = -\frac{8}{3} + \frac{24}{3} = \frac{16}{3}$$

- **Paso 4: Evaluar en el límite inferior ($x = -2$).**

$$F(-2) = -\frac{(-2)^3}{3} + 4(-2) = -\frac{-8}{3} - 8 = \frac{8}{3} - 8$$

Convertimos el -8 en fracción de tercios ($-8 = -\frac{24}{3}$):

$$F(-2) = \frac{8}{3} - \frac{24}{3} = -\frac{16}{3}$$

- **Paso 5: Aplicar la Regla de Barrow ($F(2) - F(-2)$).**

$$\text{Área} = F(2) - F(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

- **Resultado final:** $\frac{32}{3}$ unidades cuadradas **(aproximadamente $10{,}67$)**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 20.1:** Resuelve la siguiente integral mediante cambio de variable:

$$\int 3\,x^2 \cdot (x^3 + 2)^4\,dx$$

(Solución indicada: $\frac{(x^3+2)^5}{5} + C$)

2. **Propuesto 20.2:** Calcula la integral de una función lineal compuesta:

$$\int (2x+5)^3 \, dx$$

(Solución indicada: $\frac{(2x+5)^4}{8} + C$*)*

3. **Propuesto 20.3:** Calcula el área encerrada bajo la recta $y = 3x$ y el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 4$.

(Solución indicada: 24 unidades cuadradas*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 20.1

- **Enunciado:** $\int 3x^2 \cdot (x^3+2)^4 \, dx$
- **Desarrollo:**
  1. *Cambio:* $u = x^3 + 2 \Longrightarrow du = 3x^2 \, dx$.
  2. *Sustitución:* $\int u^4 \, du$.
  3. *Integración:* $\int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C$.
  4. *Deshacer el cambio:* $\frac{(x^3+2)^5}{5} + C$.
- **Resultado:** $\frac{(x^3+2)^5}{5} + C$

Solución del Propuesto 20.2

- **Enunciado:** $\int (2x+5)^3 \, dx$
- **Desarrollo:**
  1. *Cambio:* $u = 2x + 5 \Longrightarrow du = 2\,dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{2}$.
  2. *Sustitución:* $\int u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 \, du$.
  3. *Integración:* $\frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{u^4}{8} + C$.
  4. *Deshacer el cambio:* $\frac{(2x+5)^4}{8} + C$.
- **Resultado:** $\frac{(2x+5)^4}{8} + C$

Solución del Propuesto 20.3

- **Enunciado:** Área bajo $y = 3x$ entre $x = 0$ y $x = 4$.
- **Desarrollo:**

1. *Integral definida:* Área $= \int_0^4 3\,x\,dx$.
2. *Primitiva:* $F(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{3x^2}{2}$.
3. *Evaluar límites:*
   - $F(4) = \frac{3(4^2)}{2} = \frac{3(16)}{2} = \frac{48}{2} = 24$
   - $F(0) = \frac{3(0^2)}{2} = 0$
4. *Barrow:* $F(4) - F(0) = 24 - 0 = 24$.

- **Resultado:** 24 unidades cuadradas

Voy a exponerte una tabla resúmen donde veas la ligazón entre Función, Derivada e Integral

Función El exponente es n x^n	x^2	x^4	x^9	$3x^4$	$8x^3$	$3x^8$
Derivada: El exponente es n-1	$2x$	$4x^3$	$9x^8$	$12x^3$	$24x^2$	$24x^7$
Integral / Antiderivada: El exponente es n+1	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{10}}{10}$	$\frac{3x^5}{5}$	$\frac{8x^4}{4}$	$\frac{3x^9}{9}$
¿La Integral se puede simplificar?	NO	NO	NO	NO	SI $2x^4$	SI $\frac{x^9}{3}$

Fuente: Elaboración propia, sobre datos extraídos del Canal "El Profe", *Introducción a las Derivadas*.

Así pues, mientras que en la derivada bajábamos el exponente en un 1, en la integral, el exponente lo subimos en un 1 y, además, lo dividimos todo por el mismo exponente:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ejemplo

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Caso que la función tenga un número delante, lo dejamos tal y como está, e integramos. A modo de ejemplo:

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{3}{5}x^5$$

Nótese que si derivamos el resultado de una integral obtenemos la función que se está integrando. Esta es una forma de comprobar si la integral quedó bien resuelta.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5}x^5\right) = 5 \cdot \frac{3}{5}x^4 = 3x^4$$

Y ahora, sin anestesia ni nada, con dos *cohones*, nos tiramos a la piscina:

$$\int (x^3 + 5x^2 + 3x + 2)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$$

¿Cómo lo hemos hecho? Pues en 3 pasos:

1. Los tres primeros términos de la integral $(x^3 + 5x^2 + 3x)$ no tienen ningún secreto. Simplemente, hemos aplicado $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ y nos quedamos tan panchos.
2. A la integral de cualquier número sólo, se le agrega una x, por eso al integrar, el 2 lo hemos convertido en 2x. (Recuerda que cuando derivábamos, la derivada de 2x era igual a 2).

3. Una integral indefinida[6] como esta, siempre se acaba añadiendo una C o una K al final, que simbolizan una CONSTANTE.
   - ✓ Recuerda que, cuando derivábamos, la derivada de un número solo era igual a 0.

[6] Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función.

- ✓ Ponemos la C o la K, porque al ser una integral no definida, no tenemos forma alguna de determinar (=saber) cuál era ese número.

Vamos a hacer una ruta completa que nos va a llevar desde una función inicial, para luego hacerle su derivada y luego, a partir de ésta, obtener su integral.

A partir de una función, primero la derivaremos y luego, agarramos la derivada y le haremos su integral:

Sea la función

$$y = 4x^2 + 5x - 3$$

Al derivarla nos queda

$$y' = 8x + 5$$

Y ahora vamos a hacer su Integral:

$$\int (8x + 5)\, dx = \int 8x\, dx + \int 5dx = \frac{8x^2}{2} + 5x + C$$

$$\int (8x + 5)\, dx = 4x^2 + 5x + C$$

Aunque ya no debería ser un problema a estas alturas, vamos a poner una fracción de por medio y veamos qué pasa:

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) dx = \frac{2x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x + C$$

$$\int \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1\right) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + C\, dx$$

📘 TEMA 21: EL UNIVERSO DE LAS CURVAS CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLA

21.1. ¿De dónde nacen las Cónicas? El truco del cono y la linterna

Imagina que tienes un cucurucho de helado (un cono de dos lados) y una linterna o un cuchillo mágico. Según la inclinación con la que cortes el cono, obtendrás cuatro curvas increíbles:

1. 🟢 **Circunferencia:** Si cortas en horizontal, totalmente plano, obtienes un círculo perfecto.
2. 🥚 **Elipse:** Si cortas con un poco de inclinación, obtienes un círculo aplastado (como un huevo o la órbita de la Tierra alrededor del Sol).
3. 🚀 **Parábola:** Si cortas en paralelo a una de las paredes del cono, obtienes una curva abierta con forma de "U" (como el chorro de agua de una fuente o la trayectoria de un tiro a canasta).
4. ⏳ **Hipérbola:** Si cortas en vertical atravesando ambos conos, obtienes dos curvas abiertas gemelas mirándose de espaldas.

21.2. La Ecuación Reina: La Circunferencia en el Plano

La circunferencia está formada por todos los puntos que están a la **misma distancia** (el **Radio**, R) de un punto central fijo llamado **Centro** $C(a,b)$.

👑 **Ecuación Canónica de la Circunferencia:**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

(¡Observa que es el Teorema de Pitágoras disfrazado con coordenadas!)

- Si el centro está en el origen $(0,0)$, la ecuación es muy sencilla:

$$x^2+y^2=R^2$$

21.3. La Parábola y su Punto Especial: El Vértice

La parábola es la gráfica de las ecuaciones de 2.º grado: $y=ax^2+bx+c$.

- Si $a>0$, la parábola tiene forma de sonrisa ∪ (ramas hacia arriba).
- Si $a<0$, la parábola tiene forma de tristeza ∩ (ramas hacia abajo).

- El punto más bajo o más alto de la curva se llama **Vértice** (V), y su coordenada horizontal se calcula con la fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 21.1

Halla la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el punto $C(2,3)$ y tiene un radio $R = 4$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar los datos en la fórmula canónica.**
  - Coordenada a del centro $= 2$
  - Coordenada b del centro $= 3$
  - Radio $R = 4$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

- **Paso 2: Sustituir los valores.**

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

- **Paso 3: Calcular el cuadrado del radio.**

💡 **Inciso pedagógico (Cuadrado del radio):** $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$.

La ecuación queda:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

- **Paso 4: Desarrollar las identidades notables (forma general).**
  - Para $(x-2)^2$: $x^2 - 4x + 4$
  - Para $(y-3)^2$: $y^2 - 6y + 9$
  - Juntamos: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$
  - Operamos los números sueltos: $4 + 9 - 16 = -3$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

- **Resultado final:** $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ *(o en forma general:* $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$*)*

Ejercicio Resuelto 21.2

Dada la parábola $y = x^2 - 6x + 5$, calcula las coordenadas exactas de su Vértice (V).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar los coeficientes a, b, c.**
  - $a = 1$
  - $b = -6$
  - $c = 5$
- **Paso 2: Calcular la coordenada x del vértice (x_v).**

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1}$$

💡 **Inciso pedagógico (Regla de signos):** El opuesto de -6 es $+6$.

$$x_v = \frac{6}{2} = 3$$

- **Paso 3: Calcular la coordenada y del vértice (y_v).** Metemos $x = 3$ dentro de la función original para saber la altura:

$$y_v = (3)^2 - 6(3) + 5$$

  - $3^2 = 9$
  - $-6 \cdot 3 = -18$
  - $y_v = 9 - 18 + 5 = -9 + 5 = -4$
- **Resultado final: El Vértice está en el punto $V(3, -4)$.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 21.1:** Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen $(0,0)$ y un radio $R = 5$.

(Solución indicada: $x^2 + y^2 = 25$)

2. **Propuesto 21.2:** Dada la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 49$, indica las coordenadas de su centro $C(a, b)$ y el valor de su radio R.

(Solución indicada: Centro $C(1, -4)$; Radio $R = 7$)

3. **Propuesto 21.3:** Halla el vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$.

(Solución indicada: $V(2, -3)$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 21.1

- **Enunciado:** Centro $(0,0)$, radio $R = 5$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula canónica:* $(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2$.
  2. *Sustitución:* $x^2 + y^2 = 5^2$.
  3. *Cálculo:* $5^2 = 25$.
- **Resultado:** $x^2 + y^2 = 25$

Solución del Propuesto 21.2

- **Enunciado:** $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 49$
- **Desarrollo:**
  1. *Comparar con* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$*:*
     - $x - a = x - 1 \Longrightarrow a = 1$
     - $y - b = y + 4 \Longrightarrow b = -4$ (signo opuesto)
     - $R^2 = 49 \Longrightarrow R = \sqrt{49} = 7$
- **Resultado: Centro** $C(1,-4)$**, Radio** $R = 7$

Solución del Propuesto 21.3

- **Enunciado:** $y = x^2 - 4x + 1$
- **Desarrollo:**
  1. *Coeficientes:* $a = 1, b = -4, c = 1$.
  2. *Coordenada* x_v*:*

$$x_v = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

  3. *Coordenada* y_v*:* Sustituimos $x = 2$:

$$y_v = 2^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

- **Resultado:** $V(2,-3)$

📘 TEMA 22: EL MUNDO EN TRES DIMENSIONES: POLIEDROS, CUERPOS REDONDOS Y VOLÚMENES

22.1. De la Hoja de Papel al Mundo Real: Las 3 Dimensiones (3D)

En los temas anteriores dibujamos figuras planas en 2D(largo y ancho) sobre una hoja de papel o el plano cartesiano. Pero en el mundo real, los objetos tienen 3**dimensiones**:

- **Largo** (o base)
- **Ancho** (o profundidad)
- **Alto** (o altura)

Cuando una figura tiene cuerpo y ocupa un lugar en el espacio, la llamamos **Cuerpo Geométrico** o **Sólido**.

22.2. Las Dos Grandes Familias de Cuerpos Geométricos

1. Los Poliedros (Las Figuras de Caras Planas)

Están formados exclusivamente por polígonos planos unidos entre sí.

- **Caras:** Las paredes planas de la figura.
- **Aristas:** Las líneas rectas donde se unen dos caras (los bordes).
- **Vértices:** Las esquinas puntiagudas donde se juntan tres o más aristas.

👑 Teorema de Euler para Poliedros:

En cualquier poliedro simple se cumple siempre esta fórmula mágica:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2 \quad (C + V = A + 2)$$

- **Prismas:** Tienen dos bases idénticas paralelas y caras laterales rectangulares.

- **Pirámides:** Tienen una base plana y todas sus caras laterales triangulares se unen en una única punta superior (cúspide).

2. Los Cuerpos Redondos (Los que Pueden Rodar)

Tienen al menos una superficie curva:

- **Cilindro:** Como una lata de refresco (dos bases circulares planas y una pared curva).
- **Cono:** Como un cucurucho de helado (una base circular y una punta).
- **Esfera:** Como un balón de fútbol (totalmente redonda en todas direcciones).

22.3. Las Fórmulas de Volumen: ¿Cuánto Espacio Ocupa?

El volumen mide la cantidad de espacio o agua que cabe dentro de un cuerpo. Se mide en unidades cúbicas (cm^3, m^3o litros, donde $1\ m^3 = 1000$ litros):

Cuerpo Geométrico	**Fórmula del Volumen**	**En palabras sencillas**
Cubo	$V = l^3$	Lado por lado por lado ($l \cdot l \cdot l$)
Prisma Rectangular (Caja)	$V = \text{Largo} \cdot \text{Ancho} \cdot \text{Alto}$	Multiplicar las tres medidas
Cilindro	$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	Área de la base circular por la altura
Pirámide o Cono	$V = \frac{\text{Área base} \cdot h}{3}$	Exactamente la tercera parte de un prisma o cilindro

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 22.1

Calcula el volumen de agua que cabe en una piscina rectangular que mide 5 metrosde largo, 4 metrosde ancho y 2 metrosde profundidad. ¿Cuántos litros de agua son en total?

+ 1

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar la fórmula del prisma rectangular.

$$\text{Volumen} = \text{Largo} \cdot \text{Ancho} \cdot \text{Alto}$$

- Paso 2: Sustituir los datos numéricos.
    - Largo $= 5$ m
    - Ancho $= 4$ m
    - Alto $= 2$ m

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 2$$

- Paso 3: Realizar las multiplicaciones.
    - $5 \cdot 4 = 20$
    - $20 \cdot 2 = 40$

$$V = 40 \text{ m}^3$$

- Paso 4: Convertir metros cúbicos a litros.

💡 **Inciso pedagógico (Equivalencia de capacidad):** Un metro cúbico (1 m^3) es un cubo hueco de 1 metrode lado en el que caben exactamente 1000 litrosde agua.

$$40 \cdot 1000 = 40000 \text{ litros}$$

- **Resultado final:** 40 m^3**de volumen (**40000 litros **de agua)**

Ejercicio Resuelto 22.2

Comprueba si un cubo cumple el Teorema de Euler sabiendo que tiene 6caras cuadradas y 8vértices.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Contar los elementos del cubo.
    - Número de Caras (C) $= 6$
    - Número de Vértices (V) $= 8$(las 4 esquinas de arriba y las 4 de abajo)
    - Número de Aristas (A) $= 12$(los 4 bordes de arriba, los 4 de abajo y los 4 pilares verticales)
- Paso 2: Escribir la fórmula del Teorema de Euler.

$$C + V = A + 2$$

- Paso 3: Sustituir los valores a cada lado de la igualdad.
    - Lado izquierdo: $C + V = 6 + 8 = 14$
    - Lado derecho: $A + 2 = 12 + 2 = 14$
    -

- Paso 4: Comparar los dos lados.

$$14 = 14$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprobación de igualdad):** Como ambos lados dan exactamente 14, la igualdad se cumple perfectamente.

- **Resultado final: Cumple la relación de Euler ($14 = 14$).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 22.1:** Un dado cúbico para jugar al parchís tiene una arista (lado) de 2 cm. ¿Cuál es su volumen total en cm^3?

(Solución indicada: 8 cm^3)

2. **Propuesto 22.2:** Un bote de pelotas de tenis tiene forma de cilindro con un radio en su base $R = 3$ cmy una altura $h = 10$ cm. Calcula su volumen aproximado usando $\pi \approx 3{,}14$.

(Solución indicada: $282{,}6$ cm^3)

3. **Propuesto 22.3:** Una pirámide egipcia tiene una base cuadrada con un área de 100 m^2y una altura de 9 metros. ¿Cuál es su volumen total?

(Solución indicada: 300 m^3)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 22.1

- **Enunciado:** Cubo de lado $l = 2$ cm.

- **Desarrollo:**

1. *Fórmula del volumen del cubo:* $V = l^3$.

2. *Cálculo de la potencia:* $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

- **Resultado:** 8 cm^3

Solución del Propuesto 22.2

- **Enunciado:** Cilindro con $R = 3$ cm, $h = 10$ cm, $\pi \approx 3{,}14$.

- **Desarrollo:**

  1. *Fórmula del volumen:* $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

  2. *Área de la base:* $\pi \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 9 = 28{,}26$ cm^2.

  3. *Multiplicar por la altura:* $28{,}26 \cdot 10 = 282{,}6$ cm^3.

- **Resultado:** $282{,}6$ cm^3

Solución del Propuesto 22.3

- **Enunciado:** Pirámide con Área base $= 100$ m^2, altura $h = 9$ m.

- **Desarrollo:**

  1. *Fórmula del volumen de la pirámide:* $V = \frac{\text{Área base} \cdot h}{3}$.

  2. *Multiplicar base por altura:* $100 \cdot 9 = 900$.

  3. *Dividir entre 3:* $\frac{900}{3} = 300$ m^3.

- **Resultado:** 300 m^3

📘 TEMA 23: EL ÁRBOL DE LAS MATEMÁTICAS: REPASO INTEGRAL Y MAPA DE CONEXIONES

23.1. Las Raíces Fuertes: Aritmética y Álgebra

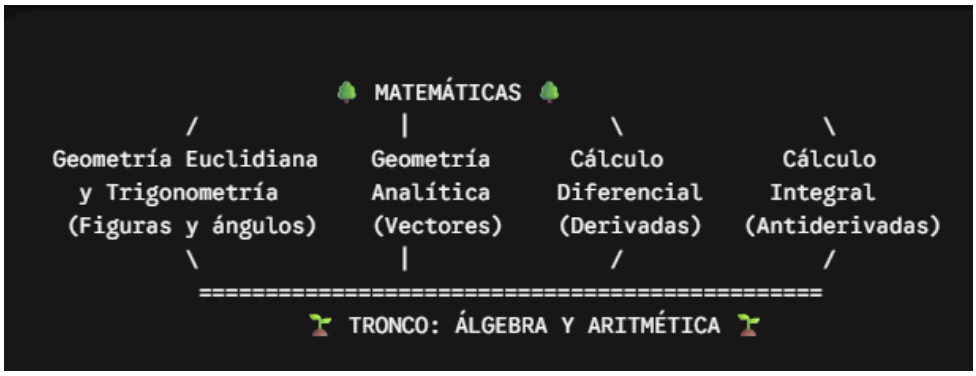
Al inicio de este viaje vimos que las matemáticas son como un **árbol gigante lleno de ramas**:

- **El Tronco y las Raíces:** Son la **Aritmética** (los números, las fracciones y las cuatro reglas) y el **Álgebra** (las letras, las incógnitas y las ecuaciones).

- Si dominas las raíces, cualquier rama alta que decidas trepar te resultará fácil y segura.

23.2. Las Grandes Ramas del Saber Matemático

A partir de las raíces crecen las cuatro grandes ramas de la ciencia:



1. **Geometría y Trigonometría:** Mide triángulos, círculos, prismas y pirámides en el espacio con el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas ($\text{sen}, \cos, \tan$).

2. **Geometría Analítica:** Coloca las figuras y vectores dentro del plano cartesiano mediante coordenadas y ecuaciones de la recta ($y = mx + n$).

3. **Cálculo Diferencial (Derivadas):** Mide la velocidad a la que cambia cualquier fenómeno en un instante preciso.

4. **Cálculo Integral (Integrales):** Hace el camino inverso sumando infinitos trozos diminutos para calcular áreas y volúmenes con curvas.

23.3. Las Doce Pruebas de la Vida Cotidiana

Don Miquel Albertí nos enseñó que toda persona necesita dominar doce habilidades básicas para su día a día:

- Saber calcular con y sin calculadora.
- Pasar con soltura de fracción a decimal y porcentaje.
- Manejar instrumentos de medida (reloj, báscula, cinta métrica).
- Descubrir patrones y sucesiones numéricas.
- Interpretar gráficos y saber traducir problemas cotidianos a ecuaciones.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 23.1

Problema de conexión total (Aritmética →Derivada →Integral):

Dada la función de posición de un tren de juguete $y(t) = 4t^3 - 6t^2 + 5t + 2$:

- a) Halla la función de su velocidad derivando la posición.
- b) Integra la función de velocidad resultante para comprobar que recuperamos la función de posición original.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Derivar para hallar la velocidad ($v = y'$):**
    - Derivada de $4t^3$: $3 \cdot 4t^{3-1} = 12t^2$.
    - Derivada de $-6t^2$: $2 \cdot (-6)t^{2-1} = -12t$.
    - Derivada de $+5t$: 5.
    - Derivada de la constante $+2$: 0.

$$v(t) = y'(t) = 12t^2 - 12t + 5$$

- **Apartado b) Integrar para recuperar la posición:**

$$\int (12t^2 - 12t + 5)\, dt$$

- Integramos $12t^2$: $12 \cdot \frac{t^3}{3} = 4t^3$.
- Integramos $-12t$: $-12 \cdot \frac{t^2}{2} = -6t^2$.
- Integramos 5: Regala una $t \rightarrow 5t$.
- Añadimos la constante $+C$.

$$y(t) = 4t^3 - 6t^2 + 5t + C$$

💡 **Inciso pedagógico (El espejo perfecto):** Si la constante C vale 2, tenemos exactamente la misma función con la que empezamos. ¡Derivada e Integral son dos caras de la misma moneda!

- **Resultado final: a)** $v(t) = 12t^2 - 12t + 5$**; b)** $y(t) = 4t^3 - 6t^2 + 5t + C$

Ejercicio Resuelto 23.2

Problema de Geometría y Ecuaciones combinadas:

El perímetro de un rectángulo mide 30 cm. Sabemos que el largo mide el doble que el ancho ($L = 2x$). Halla las dimensiones del rectángulo y calcula su área.

+ 1

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Plantear la ecuación del perímetro.**
  - Ancho $= x$
  - Largo $= 2x$
  - Suma de los 4lados $= 30$ cm:

$$x + 2x + x + 2x = 30$$

- **Paso 2: Sumar términos semejantes y despejar x.**

$$6x = 30 \Longrightarrow x = \frac{30}{6} = 5 \text{ cm}$$

- **Paso 3: Calcular las dos medidas.**
  - Ancho $= x = 5$ cm
  - Largo $= 2x = 2 \cdot 5 = 10$ cm
- **Paso 4: Calcular el área multiplicando base por altura.**

$$\text{Área} = \text{Largo} \cdot \text{Ancho} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$$

- **Resultado final: Ancho** $= 5$ cm**, Largo** $= 10$ cm**; Área** $= 50$ cm^2

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 23.1:** Deriva la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x$y luego calcula la integral de tu resultado comprobando que recuperas la estructura original.

(Solución indicada: $f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$*; Integral* $= x^4 - 2x^2 + 3x + C$*)*

2. **Propuesto 23.2:** En una tienda aplican un descuento del 20%a un abrigo que costaba 80 euro. ¿Cuánto pagamos finalmente por el abrigo?

(Solución indicada: 64 euro*)*

3. **Propuesto 23.3:** Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 15 cmy un cateto de 9 cm. Calcula el otro cateto y el área del triángulo.

(Solución indicada: Cateto $= 12$ cm*; Área* $= 54$ cm^2*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 23.1

- **Enunciado:** Derivar e integrar $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x$.

- **Desarrollo:**

1. *Derivada:* $f'(x) = 4x^3 - 2(2x) + 3 = 4x^3 - 4x + 3$.

2. *Integral:* $\int (4x^3 - 4x + 3)\, dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^4 - 2x^2 + 3x + C$.

- **Resultado:** $f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$**;** $\int f'(x)dx = x^4 - 2x^2 + 3x + C$

Solución del Propuesto 23.2

- **Enunciado:** Descuento del 20%a 80 euro.

- **Desarrollo:**

  1. *Método directo:* Descontar un 20%equivale a pagar el 80%del precio original $(100 - 20 = 80 \rightarrow 0{,}80)$.

  2. *Cálculo:* $80 \cdot 0{,}80 = 64$ euro.

- **Resultado:** 64 euro

Solución del Propuesto 23.3

- **Enunciado:** Hipotenusa $h = 15$, cateto $a = 9$.
- **Desarrollo:**

  1. *Pitágoras:* $b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} =$ 12 cm.

  2. *Área del triángulo:* $\frac{\text{Base}\cdot\text{Altura}}{2} = \frac{9\cdot 12}{2} = \frac{108}{2} = 54$ cm^2.

- **Resultado: Cateto** $= 12$ cm**; Área** $= 54$ cm^2

📘 TEMA 24: EL LENGUAJE SECRETO DE LAS MATEMÁTICAS: SUCESIONES, PATRONES Y PSICOTÉCNICOS

24.1. ¿Qué es una Sucesión? El Desfile Ordenado de Números

Una **sucesión** es una fila ordenada de números, letras o figuras que siguen una **regla secreta** o **ley de formación**. A cada uno de los números que forman la fila lo llamamos **término**:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

- a_1 es el primer término de la fila.

- a_n es el término general (la fórmula mágica que nos dice qué número va en cualquier posición).

🧩 ¿Para qué sirven?

Aparecen en todos los juegos de ingenio, acertijos, exámenes psicotécnicos y pruebas de selección de trabajo. ¡Tu misión como detective matemático es comparar un término con el anterior para cazar la regla oculta!

24.2. Los Tres Tipos de Sucesiones Numéricas

1. Sucesiones Aritméticas (El Paso Constante)

La regla secreta se encuentra **sumando o restando** siempre la misma cantidad fija, llamada **diferencia (d)**:

$$9,11,13,15,\mathbf{17} \quad (\text{Regla: } +2)[\text{cite: } 1]$$

- **Fórmula del término general:**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

2. Sucesiones Geométricas (El Salto Multiplicador)

La regla secreta se encuentra **multiplicando o dividiendo** por un número fijo, llamado **razón (r)**:

$$1,2,4,8,\mathbf{16} \quad (\text{Regla: } \times 2)[\text{cite: } 1]$$

- **Fórmula del término general:**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

3. Sucesiones Combinadas y Figurativas (El Baile Doble)

Mezclan dos operaciones que se van alternando (por ejemplo: primero multiplicar por 2 y luego sumar 3, o patrones con fichas de dominó y dados):

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{\times 2} 10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{\times 2} \mathbf{26}[\text{cite: } 1]$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 24.1

Descubre el número que falta en la siguiente serie psicotécnica:

$$4,8,24,96,480,__?__[\text{cite: } 1]$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Comparar cada término con el anterior para hallar el patrón.
    - De 4 a 8: multiplicamos por 2 ($4 \cdot 2 = 8$).
    - De 8 a 24: multiplicamos por 3 ($8 \cdot 3 = 24$).
    - De 24 a 96: multiplicamos por 4 ($24 \cdot 4 = 96$).
    - De 96 a 480: multiplicamos por 5 ($96 \cdot 5 = 480$).
- Paso 2: Formular la ley de formación.

💡 **Inciso pedagógico (Patrón multiplicativo creciente):** La regla consiste en ir multiplicando sucesivamente por números que aumentan de uno en uno: $\times 2, \times 3, \times 4, \times 5$ ….

Por tanto, el siguiente paso debe ser **multiplicar por** 6.

- Paso 3: Calcular el término que falta.

$$480 \cdot 6 = 2880 [\text{cite: } 1]$$

- **Resultado final:** 2880

Ejercicio Resuelto 24.2

En una progresión aritmética el primer término es $a_1 = 5$ y la diferencia es $d = 3$.

- a) Escribe los primeros 4 términos de la sucesión.
- b) Calcula el valor del término en la posición número 20 (a_{20}).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Hallar los 4 primeros términos:**
    - $a_1 = 5$
    - $a_2 = 5 + 3 = 8$
    - $a_3 = 8 + 3 = 11$
    - $a_4 = 11 + 3 = 14$
    - La fila es: $5, 8, 11, 14$ …
- **Apartado b) Calcular el término a_{20} con la fórmula:**
    - Usamos $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
    - Sustituimos $a_1 = 5$, $n = 20$ y $d = 3$:

$$a_{20} = 5 + (20 - 1) \cdot 3$$

- 💡 **Inciso pedagógico (Orden PEMDAS en sucesiones):** Primero restamos dentro del paréntesis: $20 - 1 = 19$. Luego multiplicamos por la diferencia: $19 \cdot 3 = 57$. Por último, sumamos el término inicial: $5 + 57 = 62$.
- $a_{20} = 5 + 57 = 62$
- **Resultado final: a)** $5,8,11,14$**; b)** $a_{20} = 62$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 24.1:** Halla el siguiente número en la sucesión combinada:

$$2,6,8,24,26,78,__?__ \text{[cite: 1]}$$

(Solución indicada: 80)

2. **Propuesto 24.2:** En una sucesión geométrica, el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$. Escribe los primeros 5 términos.

(Solución indicada: $3,6,12,24,48$*)*

3. **Propuesto 24.3:** En una progresión aritmética con $a_1 = 10$ y diferencia $d = 4$, calcula el término que ocupa la posición 50 (a_{50}).

(Solución indicada: $a_{50} = 206$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 24.1

- **Enunciado:** $2,6,8,24,26,78, \ldots$
- **Desarrollo:**
    1. *Identificar el patrón:*
        - $2 \cdot 3 = 6$
        - $6 + 2 = 8$
        - $8 \cdot 3 = 24$
        - $24 + 2 = 26$
        - $26 \cdot 3 = 78$
    2. *Siguiente paso:* La regla alterna $\times 3$ y $+2$. Como la última operación fue $\times 3$, ahora toca **sumar** 2:

$$78 + 2 = 80 \text{[cite: 1]}$$

- **Resultado:** 80

Solución del Propuesto 24.2

- **Enunciado:** $a_1 = 3, r = 2$. Hallar 5 primeros términos.
- **Desarrollo:**
    1. Multiplicamos sucesivamente por 2:
        - $a_1 = 3$
        - $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
        - $a_3 = 6 \cdot 2 = 12$
        - $a_4 = 12 \cdot 2 = 24$
        - $a_5 = 24 \cdot 2 = 48$
- **Resultado:** $3,6,12,24,48$

Solución del Propuesto 24.3

- **Enunciado:** $a_1 = 10, d = 4$. Hallar a_{50}.
- **Desarrollo:**
    1. *Fórmula:* $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.
    2. *Sustitución:*

$$a_{50} = 10 + (50 - 1) \cdot 4 = 10 + 49 \cdot 4$$

    3. *Multiplicación y suma:* $49 \cdot 4 = 196 \Longrightarrow 10 + 196 = 206$.
- **Resultado:** $a_{50} = 206$

📘 TEMA 25: EL VIAJE DE LOS NÚMEROS ASTRONÓMICOS Y MICROSCÓPICOS: NOTACIÓN CIENTÍFICA

25.1. ¿Por qué se inventó la Notación Científica?

Imagina que eres un astrónomo y quieres escribir la distancia que recorre un rayo de luz en un año (un año luz):

$9.460.000.000.000$ kilómetros(nueve billones cuatrocientos sesenta mil millones de kilómetros).

O imagina que eres un biólogo y quieres medir el tamaño de una bacteria pequeñita:

$0{,}000003$ metros.

Escribir tantos ceros seguidos en un cuaderno o en la calculadora es una pesadilla: te cansa la mano y es facilísimo equivocarse o saltarse un cero.

+ 1

Para resolver este problema, la ciencia inventó la **Notación Científica**: una forma limpia y ordenada de escribir cualquier número usando potencias de base 10.

25.2. La Estructura de la Notación Científica

Cualquier número en notación científica se escribe siempre con esta forma:

$$c \cdot 10^n$$

- **La Mantisa (c):** Es un número que tiene que estar **entre** 1 **y** 10 (puede ser $1{,}2{,}5{,}8{,}9\ldots$, pero nunca $0{,}5$ ni 12). Solo lleva **una única cifra distinta de cero delante de la coma**.

- **La Potencia de 10 (10^n):** El exponente n nos cuenta cuántos saltos ha tenido que dar la coma para colocarse en su sitio:
    - 🚀 **Si el número es gigante (> 1):** El exponente es **positivo ($+$)**. Nos dice cuántos ceros o posiciones empujan hacia la derecha.

    - 🔬 **Si el número es diminuto (< 1):** El exponente es **negativo ($-$)**. Nos dice cuántas posiciones nos movimos hacia la izquierda.

25.3. ¿Cómo Mover la Coma? La Regla de los Saltos

1. **Para números muy grandes:**
    - Colocamos la coma justo detrás de la primera cifra diferente de cero.

- Contamos cuántas cifras quedan **a la derecha de la coma** hasta llegar al final: ese número de saltos es el exponente positivo.

- Ejemplo: $500.000 \rightarrow 5 \cdot 10^{5}$(la coma dio 5saltos).

2. **Para números muy pequeños:**
   - Colocamos la coma justo detrás de la primera cifra diferente de cero.

   - Contamos cuántos ceros y saltos hay hacia la **izquierda**: ese número de saltos es el exponente negativo.

   - Ejemplo: $0{,}004 \rightarrow 4 \cdot 10^{-3}$(la coma dio 3saltos a la izquierda).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 25.1

Escribe en notación científica la distancia de un año luz dada en el libro:

$$D = 9.460.000.000.000 \text{ km}$$[cite: 1]

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Colocar la coma en la primera cifra válida.

La primera cifra distinta de cero es el 9. Ponemos la coma detrás:

$$9{,}46$$

- Paso 2: Contar los saltos desde la coma hasta el final del número.

Contamos todas las posiciones que quedan a la derecha del 9:

- Las dos cifras 4y 6(2 saltos).
- Los diez ceros siguientes (10 saltos).
- En total: $2 + 10 = 12$saltos.

- Paso 3: Escribir la potencia de 10 con exponente positivo.

💡 **Inciso pedagógico (Comprobar el tamaño):** Como el número representa una distancia astronómica enorme, el exponente de 10debe ser positivo ($+12$).

$$9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

- **Resultado final:** $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

Ejercicio Resuelto 25.2

Multiplica y simplifica el resultado en notación científica:

$$(2 \cdot 10^4) \cdot (3 \cdot 10^5)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Multiplicar los números normales (mantisas) por un lado.

$$2 \cdot 3 = 6$$

- Paso 2: Multiplicar las potencias de 10 por el otro lado.

💡 **Inciso pedagógico (Ley del producto de potencias con igual base):** Dejamos la base 10y sumamos los exponentes: $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$.

$$10^4 \cdot 10^5 = 10^{4+5} = 10^9$$

- **Paso 3: Unir ambas piezas.**

$$6 \cdot 10^9$$

- **Resultado final:** $6 \cdot 10^9$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 25.1:** Escribe en notación científica las siguientes cantidades:
    - a) La población de un país: $47.000.000$ habitantes
    - b) El grosor de un hilo microscópico: $0{,}00008$ metros

(Solución indicada: a) $4{,}7 \cdot 10^7$*; b)* $8 \cdot 10^{-5}$*)*

2. **Propuesto 25.2:** Pasa de notación científica a número ordinario con todos sus ceros:
    - a) $3{,}5 \cdot 10^4$
    - b) $6 \cdot 10^{-3}$

(Solución indicada: a) 35.000*; b)* $0{,}006$*)*

3. **Propuesto 25.3:** Divide las siguientes cantidades en notación científica:

$$\frac{8 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^3}$$

(Solución indicada: $4 \cdot 10^4$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 25.1

- **Enunciado:** a) $47.000.000$; b) $0{,}00008$
- **Desarrollo:**
    1. $47.000.000$*:* Ponemos la coma tras el $4 (4{,}7)$. Desde el 4hasta el final hay 7posiciones $\rightarrow 4{,}7 \cdot 10^7$.
    2. $0{,}00008$*:* Ponemos la coma tras el 8. Hay que retroceder 5saltos hasta la coma inicial $\rightarrow 8 \cdot 10^{-5}$.

- **Resultado: a)** $4{,}7 \cdot 10^7$**; b)** $8 \cdot 10^{-5}$

Solución del Propuesto 25.2

- **Enunciado:** a) $3{,}5 \cdot 10^4$; b) $6 \cdot 10^{-3}$
- **Desarrollo:**
    1. $3{,}5 \cdot 10^4$*:* Movemos la coma 4lugares a la derecha: un salto para pasar el 5y tres ceros más $\rightarrow 35.000$.
    2. $6 \cdot 10^{-3}$*:* Movemos la coma 3lugares a la izquierda del 6: colocamos 0,seguido de dos ceros y el $6 \rightarrow 0{,}006$.

- **Resultado: a)** 35.000**; b)** $0{,}006$

Solución del Propuesto 25.3

- **Enunciado:** $\frac{8 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^3}$
- **Desarrollo:**
  1. *Dividimos los coeficientes:* $8 \div 2 = 4$.
  2. *Dividimos las potencias de 10:* Restamos los exponentes ($\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$):

$$10^7 \div 10^3 = 10^{7-3} = 10^4$$

  3. *Unimos el resultado:* $4 \cdot 10^4$.
- **Resultado:** $4 \cdot 10^4$

📘 TEMA 26: HISTORIA DE LOS NÚMEROS Y SISTEMAS DE NUMERACIÓN: DEL SISTEMA MAYA AL BINARIO

26.1. ¿Por qué no siempre contamos igual?

Hoy en día casi todo el mundo usa el sistema decimal (Base 10) porque tenemos 10 dedos en las manos para contar. Pero a lo largo de la historia, distintas civilizaciones inventaron formas muy ingeniosas de escribir los números:

- 🏛️ **Sistema Romano:** No utiliza posición, sino letras que suman o restan ($I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$).
- 🌽 **Sistema Maya (Base 20 / Base 5):** Usaban puntos para el 1, rayas para el 5 y una concha o caracol para representar el número **cero**.
- 🏺 **Sistema Babilónico (Base 60):** En la antigua Babilonia contaban de 60 en 60. ¿Por qué el 60? Porque es divisible de forma exacta entre 11 números distintos ($1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30$). ¡Gracias a ellos hoy dividimos las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos!

- 💻 **Sistema Binario (Base 2):** Es el idioma de los ordenadores y móviles. Solo utiliza dos dígitos: el 0 (apagado) y el 1 (encendido).

26.2. La Magia del Sistema Posicional Decimal

En nuestro sistema indoarábigo tradicional, el valor de una cifra depende del **lugar donde esté colocada** (es un sistema posicional):

- En el número 52, el 5 vale 50 (decenas).
- En el número 520, el 5 vale 500 (centenas).
- En el número 5.000, el 5 vale cinco unidades de millar.

Podemos descomponer cualquier número en potencias de 10:

$$465 = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 400 + 60 + 5$$

26.3. El Código Binario: Cómo piensa un Ordenador

Un ordenador no tiene dedos, solo interruptores diminutos. Para escribir números en base 2, usamos las potencias de 2 $(1,2,4,8,16,32,64 \ldots)$:

Decimal (Base 10)	Binario (Base 2)	¿Cómo se construye?
0	0	Todo apagado.
1	1	$1 \cdot 2^0$.
2	10	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.
3	11	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
4	100	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$
5	101	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 26.1

Convierte el número decimal 13 al sistema binario (Base 2) utilizando divisiones sucesivas entre 2.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Dividir sucesivamente entre 2 y guardar los restos.**
  - $13 \div 2 = 6$ (y sobra un resto de 1).
  - $6 \div 2 = 3$ (y sobra un resto de 0).
  - $3 \div 2 = 1$ (y sobra un resto de 1).
  - El último cociente es 1.
- **Paso 2: Escribir el número binario leyendo de atrás hacia adelante.**

Tomamos el último cociente (1) y todos los restos que fuimos guardando en orden inverso:

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$$

- **Paso 3: Comprobación con potencias de 2.**

💡 **Inciso pedagógico (Comprobar el código binario):** Sumamos las potencias activadas por los unos:

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13$$

- **Resultado final:** $13_{(\text{decimal})} = 1101_{(\text{binario})}$

Ejercicio Resuelto 26.2

Traduce el número romano $MDCLXVI$ al sistema decimal ordinario.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- Paso 1: Identificar el valor de cada letra romana.
  - $M = 1000$
  - $D = 500$
  - $C = 100$
  - $L = 50$
  - $X = 10$
  - $V = 5$
  - $I = 1$

- Paso 2: Aplicar la regla de la suma (números de mayor a menor).

💡 **Inciso pedagógico (Regla aditiva romana):** Cuando las cifras van ordenadas de mayor a menor valor de izquierda a derecha, se suman todas directamente.

$$\text{Total} = 1000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1$$

- **Paso 3: Sumar los términos.**

$$1000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1666$$

- **Resultado final:** 1666

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 26.1:** Pasa el número decimal 7 al sistema binario (Base 2).

(Solución indicada: 111*)*

2. **Propuesto 26.2:** ¿Qué número decimal representa el código binario 1010?

(Solución indicada: 10*)*

3. **Propuesto 26.3:** Escribe en números romanos el año 2024.

(Solución indicada: $MMXXIV$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 26.1

- **Enunciado:** Convertir 7 a binario.
- **Desarrollo:**
    1. *Divisiones:*
        - $7 \div 2 = 3$ (resto 1)
        - $3 \div 2 = 1$ (resto 1)
        - Último cociente $= 1$.
    2. *Lectura inversa:* 111.
- **Resultado:** 111

Solución del Propuesto 26.2

- **Enunciado:** Convertir 1010 a decimal.
- **Desarrollo:**

1. *Posiciones de potencias de 2:*

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

2. *Cálculo:* $8 + 0 + 2 + 0 = 10$.

- **Resultado:** 10

Solución del Propuesto 26.3

- **Enunciado:** Escribir 2024 en números romanos.
- **Desarrollo:**
  1. *2000 = MM*
  2. *20 = XX*
  3. *4 = IV* (el I resta 1 delante del V)
  4. *Unimos todo:* $MMXXIV$.
- **Resultado:** $MMXXIV$

📘 TEMA 27: EL ARTE DE CONTAR SIN ENUMERAR: COMBINATORIA Y PRINCIPIOS DE CONTEO

27.1. ¿Qué es la Combinatoria?

La **Combinatoria** es la rama de las matemáticas que nos enseña a calcular cuántas combinaciones, grupos o caminos posibles existen sin necesidad de tener que dibujarlos o escribirlos uno por uno.

- Si tienes 3 **camisetas** y 4 **pantalones**, ¿de cuántas formas distintas te puedes vestir?
- Si hay 8 **corredores** en una carrera olímpica, ¿de cuántas formas pueden repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

27.2. El Principio Fundamental del Conteo y el Factorial ($n!$)

1. Principio de Multiplicación

Si una primera decisión tiene p opciones y una segunda decisión tiene q opciones, el número total de maneras de combinarlas es:

$$\text{Total} = p \cdot q$$

👕 **Ejemplo de la ropa:** 3 camisetas $\cdot$ 4 pantalones $=$ 12 conjuntos distintos.

2. El Número Factorial ($n!$)

El factorial de un número entero positivo n es la multiplicación en cuenta atrás de todos los números enteros desde n hasta el 1:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- *(Por convenio matemático, se define* $0! = 1$*).*

27.3. Los Tres Grandes Modelos de Combinatoria

Para resolver cualquier problema de conteo, solo debes hacerte **dos preguntas clave**:

1. *¿Entran todos los elementos del grupo?*
2. *¿Importa el orden en que los colocamos?*

¿Importa el orden?

/ \

SÍ NO

/ \

¿Entran TODOS los elementos? COMBINACIONES (C_n^k)

/ \ (Hacer equipos, ensaladas)

SÍ NO

PERMUTACIONES (P_n) VARIACIONES (V_n^k)

(Ordenar en fila) (Podios, contraseñas)

Tipo	**¿Importa el orden?**	**¿Entran todos?**	**Fórmula**	**Ejemplo típico**
Permutaciones (P_n)	**SÍ**	**SÍ**	$P_n = n!$	Sentar a n amigos en una fila de sillas.

Tipo	¿Importa el orden?	¿Entran todos?	Fórmula	Ejemplo típico
Variaciones (V_n^k)	**SÍ**	**NO**	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Elegir k puestos (oro, plata) entre n personas.
Combinaciones (C_n^k)	**NO**	**NO**	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	Elegir un equipo de k personas entre un grupo de n.

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 27.1

En una carrera de atletismo compiten 6 atletas. ¿De cuántas formas distintas pueden quedar repartidas las tres medallas (oro, plata y bronce)?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Analizar la situación haciéndonos las dos preguntas clave.**
  - *¿Importa el orden?* **SÍ** (no es lo mismo ganar el oro que el bronce).
  - *¿Entran todos los elementos?* **NO** (de los 6 atletas, solo 3 reciben medalla).
  - Por tanto, se trata de **Variaciones sin repetición** de 6 elementos tomados de 3 en 3 (V_6^3).
- **Paso 2: Aplicar la fórmula de las Variaciones.**

$$V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$$

- **Paso 3: Desarrollar los factoriales y simplificar.**

💡 **Inciso pedagógico (Atajo de simplificación de factoriales):**

Escribimos $6!$ como $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$ para cancelar el $3!$ del denominador directamente:

$$V_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

- **Paso 4: Multiplicar.**
  - $6 \cdot 5 = 30$
  - $30 \cdot 4 = 120$
- **Resultado final:** 120 formas distintas de repartir las medallas**.**

Ejercicio Resuelto 27.2

Un profesor tiene una clase de 10 alumnos y quiere elegir a un grupo de 3 alumnos para representarlos en un concurso escolar. ¿Cuántos equipos diferentes puede formar?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Analizar la situación con las preguntas clave.**
  - *¿Importa el orden?* **NO** (el equipo formado por Ana, Luis y Carlos es exactamente el mismo equipo si nombramos a Carlos, Ana y Luis).
  - *¿Entran todos los elementos?* **NO** (elegimos 3 de un total de 10).
  - Se trata de **Combinaciones** de 10 elementos tomados de 3 en 3 (C_{10}^3).
- **Paso 2: Aplicar la fórmula de Combinaciones (número combinatorio).**

$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!}$$

- **Paso 3: Desarrollar y simplificar.**
  - Desarrollamos $10!$ hasta llegar a $7!$:

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$$

  - Desarrollamos el $3!$:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

  - Sustituimos y cancelamos $7!$:

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{6 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6}$$

- **Paso 4: Operar la fracción.**
  - Numerador: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
  - División: $\frac{720}{6} = 120$
- **Resultado final: Se pueden formar** 120 equipos distintos**.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 27.1:** ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 4 amigos en una fila de 4 butacas de cine?

(Solución indicada: 24 formas*)*

2. **Propuesto 27.2:** Un candado de seguridad tiene un código secreto formado por 3 dígitos distintos elegidos entre los números del 1 al 9 (sin repetir). ¿Cuántas contraseñas posibles se pueden crear?

(Solución indicada: 504 códigos*)*

3. **Propuesto 27.3:** En una heladería tienen 7 sabores de fruta distintos. Si pedimos una copa con una mezcla de 2 bolas de sabores diferentes, ¿cuántas combinaciones de sabores podemos probar?

(Solución indicada: 21 combinaciones*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 27.1

- **Enunciado:** Sentar a 4 amigos en 4 butacas.
- **Desarrollo:**
  1. *Identificación:* Entran todos (4) e importa el orden → **Permutaciones** (P_4).
  2. *Cálculo:*

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

- **Resultado:** 24 formas

Solución del Propuesto 27.2

- **Enunciado:** Códigos de 3 dígitos con 9 números disponibles (sin repetir).
- **Desarrollo:**
    1. *Identificación:* Importa el orden (el código 123 es distinto de 321) y no entran todos (3 de 9) → **Variaciones** (V_9^3).
    2. *Cálculo:*

$$V_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

- **Resultado:** 504 códigos posibles

Solución del Propuesto 27.3

- **Enunciado:** Elegir 2 sabores entre 7 disponibles.
- **Desarrollo:**
    1. *Identificación:* No importa el orden (fresa y limón es lo mismo que limón y fresa) y no entran todos → **Combinaciones** (C_7^2).
    2. *Cálculo:*

$$C_7^2 = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21$$

- **Resultado:** 21 combinaciones

📘 TEMA 28: EL MISTERIO DEL AZAR: PROBABILIDAD Y LA REGLA DE LAPLACE

28.1. ¿Qué es la Probabilidad? Medir la incertidumbre

En la vida cotidiana hay cosas que sabemos con certeza que ocurrirán (como que mañana saldrá el Sol) y otras que dependen enteramente del azar (como qué número saldrá al tirar un dado o si lloverá este fin de semana).

La **Probabilidad (P)** es la rama de las matemáticas que le pone un número exacto a la oportunidad de que ocurra un suceso:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- $P(A) = 0$**(Suceso Imposible):** Es totalmente imposible que ocurra (por ejemplo, sacar un 7al tirar un dado normal de seis caras).
- $P(A) = 1$**o** 100%**(Suceso Seguro):** Ocurrirá sí o sí (por ejemplo, sacar un número menor que 10en un dado).
- $0 < P(A) < 1$**(Suceso Posible / Aleatorio):** Puede ocurrir o no (por ejemplo, sacar cara al lanzar una moneda, $P = 0{,}5$o 50%).

28.2. La Regla de Oro: La Ley de Laplace

Cuando todos los resultados posibles tienen las mismas oportunidades de salir (sucesos equiprobables), el matemático Pierre-Simon Laplace formuló la regla más famosa de la probabilidad:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

- **Casos Favorables:** Las opciones en las que tú ganas o que cumplen la condición del problema.
- **Casos Posibles (Espacio Muestral,** E**):** Todos los resultados que pueden salir en total.

🎲 **Ejemplo del dado:**

¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par al tirar un dado de 6 caras?

- Casos posibles: $\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow$ **6** opciones.
- Casos favorables (pares): $\{2,4,6\} \rightarrow$ **3** opciones.

$$P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad (50\%)$$

28.3. Sucesos Contrarios e Independientes

1. **El Suceso Contrario (**$\overline{A}$**):**

Es la probabilidad de que **NO** ocurra el evento A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

   - Si la probabilidad de lluvia es del $30\%(0{,}30)$, la probabilidad de que no llueva es $1 - 0{,}30 = 0{,}70(70\%)$.

2. **Sucesos Independientes (Regla del Producto):**

Si lanzas dos monedas seguidas, lo que salga en la primera no afecta en nada a la segunda. Para saber la probabilidad de que ocurran las dos cosas a la vez, se multiplican sus probabilidades individuales:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 28.1

En una bolsa opaca hay 10bolas: 5bolas rojas, 3bolas verdes y 2bolas azules. Si extraemos una bola al azar:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de NO sacar una bola roja?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Probabilidad de sacar bola verde:**
  - **Casos posibles (Total de bolas):** $5 + 3 + 2 = 10$bolas en total.
  - **Casos favorables (Bolas verdes):** 3bolas verdes.
  - Aplicamos la Regla de Laplace:

$$P(\text{verde}) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

- 💡 **Inciso pedagógico (Expresar en porcentaje):** Para pasar de decimal a porcentaje multiplicamos por 100: $0{,}3 \cdot 100 = 30\%$.
- **Apartado b) Probabilidad de NO sacar bola roja:**
  - **Método 1 (Por casos favorables):** Las bolas que no son rojas son las verdes y las azules ($3 + 2 = 5$ bolas).

$$P(\text{no roja}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad (50\%)$$

  - **Método 2 (Por suceso contrario):** Calculamos primero $P(\text{roja}) = \frac{5}{10} = 0{,}5$.

Usamos la fórmula del contrario:

$$P\left(\overline{\text{roja}}\right) = 1 - P(\text{roja}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \quad (50\%)$$

- **Resultado final: a)** $P(\text{verde}) = \frac{3}{10}$**(**$30\%$**); b)** $P(\text{no roja}) = \frac{1}{2}$**(**$50\%$**)**

Ejercicio Resuelto 28.2

Lanzamos dos monedas al aire a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras (C, C)?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Escribir el espacio muestral con todas las combinaciones posibles.**
  - $E = \{(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)\}$
  - Hay en total 4**casos posibles**.
- **Paso 2: Contar los casos favorables.**
  - Solo hay 1**caso favorable**: (C, C).
- **Paso 3: Aplicar la Regla de Laplace (o regla del producto).**
  - Por Laplace:

$$P(C, C) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad (25\%)$$

  - Por producto de sucesos independientes:

$$P(\text{Cara en 1.ª}) = \frac{1}{2}, \quad P(\text{Cara en 2.ª}) = \frac{1}{2}$$

$$P(C \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- **Resultado final:** $P(C, C) = \frac{1}{4} = 0{,}25$**(**$25\%$**)**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 28.1:** Se lanza un dado equilibrado de 6caras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número mayor que 4?

(Solución indicada: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$*)*

2. **Propuesto 28.2:** En una baraja española de 40cartas, ¿cuál es la probabilidad de extraer una carta que sea una figura (sota, caballo o rey)? *(Recuerda que hay* 3*figuras por cada uno de los* 4*palos:* 12*figuras en total)*.

(Solución indicada: $\frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%$*)*

3. **Propuesto 28.3:** Si la probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste un tiro libre es del $80\%(0{,}8)$, ¿cuál es la probabilidad de que falle el tiro?

(Solución indicada: $0{,}2$*o* 20%*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 28.1

- **Enunciado:** Tirar un dado y obtener un número mayor que 4.
- **Desarrollo:**
  1. *Casos posibles:* $\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow 6$.
  2. *Casos favorables:* Números mayores estrictos que $4 \rightarrow \{5,6\} \rightarrow 2$casos.
  3. *Laplace:*

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \quad (33{,}3\%)$$

- **Resultado:** $\frac{1}{3}$**(**$33{,}3\%$**)**

Solución del Propuesto 28.2

- **Enunciado:** Sacar una figura en una baraja de 40cartas.
- **Desarrollo:**
  1. *Casos posibles:* 40cartas.
  2. *Casos favorables:* 4 palos $\cdot\, 3$ figuras $= 12$ figuras.
  3. *Laplace:*

$$P = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \quad (30\%)$$

- **Resultado:** $\frac{3}{10}$**(**30%**)**

Solución del Propuesto 28.3

- **Enunciado:** $P(\text{encestar}) = 0{,}8$. Hallar $P(\text{fallar})$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula del contrario:*

$$P(\text{fallar}) = 1 - P(\text{encestar})$$

  2. *Cálculo:*

$$1 - 0{,}8 = 0{,}2 \quad (20\%)$$

- **Resultado:** $0{,}2$**(**20%**)**

📘 TEMA 29: EL PODER DE LOS DATOS: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA, FRECUENCIAS Y MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

29.1. ¿Para qué sirve la Estadística? Contar historias con datos

Mientras que la **Probabilidad** mira hacia el futuro para predecir lo que podría pasar, la **Estadística** mira los datos del pasado o del presente para entender la realidad, sacar conclusiones y tomar mejores decisiones.

- 👥 **Población:** Es el grupo completo de personas u objetos que queremos estudiar (por ejemplo, todos los alumnos de un instituto).
- 🎯 **Muestra:** Es un subgrupo representativo más pequeño que seleccionamos para hacer la encuesta cuando la población es demasiado grande (por ejemplo, 50 alumnos elegidos al azar).
- 📊 **Variable Estadística:** La característica que medimos:
  - **Cualitativa:** Expresa una cualidad o gusto (color favorito, deporte preferido).
  - **Cuantitativa:** Expresa una cantidad numérica (edad, altura, notas de un examen).

29.2. La Tabla de Frecuencias: Ordenar el caos

Cuando recogemos muchos datos sueltos, los organizamos en una tabla:

- **Frecuencia Absoluta (f_i):** El número de veces que se repite un dato exacto.

(La suma de todas las frecuencias absolutas debe ser igual al total de datos, N).

- **Frecuencia Relativa (h_i):** La proporción o porcentaje que representa ese dato sobre el total:

$$h_i = \frac{f_i}{N}$$

(La suma de todas las frecuencias relativas siempre da 1, o el 100%).

29.3. Los Tres Reyes del Resumen: Media, Mediana y Moda

Para resumir una lista entera de números en un solo valor representativo, usamos los **parámetros de centralización**:

1. La Media Aritmética ($\bar{x}$) — El Reparto Justo

Sumamos todos los valores y los dividimos entre el número total de datos:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

2. La Mediana (Me) — El Centro Exacto

Es el número que queda justo **en el medio de la fila** una vez que hemos ordenado todos los datos de menor a mayor:

- Si el número de datos es **impar**, es el valor central exacto.
- Si el número de datos es **par**, se calcula la media de los dos números que quedan en el centro.

3. La Moda (Mo) — El Más Popular

Es el dato que **más veces se repite** (el que tiene la mayor frecuencia absoluta).

📏 **El Rango o Recorrido (Dispersión básica):**

Mide cuánto se extienden los datos de punta a punta:

$$\text{Rango} = \text{Dato Máximo} - \text{Dato Mínimo}$$

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 29.1

Las notas obtenidas por 7 alumnos en un examen de matemáticas son las siguientes:

$$4, \quad 6, \quad 9, \quad 6, \quad 7, \quad 6, \quad 10$$

- a) Calcula la Media aritmética ($\bar{x}$).
- b) Encuentra la Moda (Mo).
- c) Halla la Mediana (Me) y el Rango.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular la Media ($\bar{x}$):**
  - Sumamos todas las notas:

$$4 + 6 + 9 + 6 + 7 + 6 + 10 = 48$$

  - Dividimos la suma entre el número total de alumnos ($N = 7$):

$$\bar{x} = \frac{48}{7} \approx 6{,}86$$

- **Apartado b) Encontrar la Moda (Mo):**
  - Contamos cuántas veces aparece cada nota:
    - El 4 aparece 1 vez.
    - El 6 aparece 3 **veces**.
    - El 7,9 y 10 aparecen 1 vez cada uno.
  - La nota más repetida es el 6, por lo que $Mo = 6$.
- **Apartado c) Hallar la Mediana (Me) y el Rango:**
  - **Paso 1: Ordenar los datos de menor a mayor:**

$$4,\quad 6,\quad 6,\quad \mathbf{6},\quad 7,\quad 9,\quad 10$$

  - **Paso 2: Localizar el centro:**

💡 **Inciso pedagógico (Posición central con datos impares):**
Como hay 7 datos (número impar), dejamos 3 números a la izquierda y 3 números a la derecha. El número central que queda en la cuarta posición es el 6.

$$Me = 6$$

  - **Paso 3: Calcular el Rango:**

$$\text{Rango} = \text{Máximo} - \text{Mínimo} = 10 - 4 = 6$$

- **Resultado final: a)** $\bar{x} \approx 6{,}86$**; b)** $Mo = 6$**; c)** $Me = 6$**, Rango** $= 6$

Ejercicio Resuelto 29.2

En una encuesta a 20 familias sobre el número de mascotas que tienen en casa, se obtuvieron los siguientes datos agrupados en tabla:

Mascotas (xi)	Familias (fi)
0	8
1	7
2	3
3	2

Mascotas (xi)	Familias (fi)
Total	$N = 20$

Calcula la media ponderada del número de mascotas por familia.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Multiplicar cada valor por su frecuencia absoluta ($x_i \cdot f_i$):**
  - 0 mascotas $\cdot\, 8$ familias $= 0$
  - 1 mascota $\cdot\, 7$ familias $= 7$
  - 2 mascotas $\cdot\, 3$ familias $= 6$
  - 3 mascotas $\cdot\, 2$ familias $= 6$
- **Paso 2: Sumar el total acumulado de mascotas:**

  Suma total $= 0 + 7 + 6 + 6 = 19$ mascotas en total
- **Paso 3: Dividir entre el total de familias ($N = 20$):**

$$\bar{x} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

- **Resultado final: La media es de** $0{,}95$ mascotas por familia**.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 29.1:** Durante una semana se registraron las siguientes temperaturas máximas en una ciudad (en °C):

$$18,\quad 20,\quad 22,\quad 20,\quad 25,\quad 21,\quad 21$$

Calcula la media aritmética y la moda de las temperaturas.

(Solución indicada: Media $= 21$ °C*; Bimodal: Modas* $= 20$ °C *y* 21 °C*)*

2. **Propuesto 29.2:** Encuentra la mediana de la siguiente lista de 6 números con cantidad par de datos:

$$12,\quad 5,\quad 8,\quad 20,\quad 15,\quad 10$$

(Solución indicada: $Me = 11$*)*

3. **Propuesto 29.3:** Si en un grupo de 4 amigos la media de edad es exactamente 15 años, y sabemos que tres de ellos tienen 14, 16 y 17 años, ¿cuántos años tiene el cuarto amigo?

(Solución indicada: 13 años*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 29.1

- **Enunciado:** Temperaturas: $18{,}20{,}22{,}20{,}25{,}21{,}21$.
- **Desarrollo:**
  1. *Media:*
  $$\bar{x} = \frac{18 + 20 + 22 + 20 + 25 + 21 + 21}{7} = \frac{147}{7} = 21 \text{ °C}$$
  2. *Moda:* El 20 se repite 2 veces y el 21 se repite 2 veces. Ambos comparten la frecuencia máxima.
- **Resultado: Media** $= 21$ °C**; Modas** $= 20$ °C **y** 21 °C **(distribución bimodal)**

Solución del Propuesto 29.2

- **Enunciado:** Mediana de $12{,}5{,}8{,}20{,}15{,}10$.
- **Desarrollo:**
  1. *Ordenar de menor a mayor:*
  $$5, \quad 8, \quad \mathbf{10}, \quad \mathbf{12}, \quad 15, \quad 20$$
  2. *Calcular la media de los dos centrales:* Como $N = 6$ (par), los dos valores centrales son el 10 y el 12:
  $$Me = \frac{10 + 12}{2} = \frac{22}{2} = 11$$
- **Resultado:** $Me = 11$

Solución del Propuesto 29.3

- **Enunciado:** $N = 4$, $\bar{x} = 15$, edades: $14{,}16{,}17{,}x$.
- **Desarrollo:**
  1. *Plantear la ecuación de la media:*
  $$\frac{14 + 16 + 17 + x}{4} = 15$$
  2. *Sumar términos y despejar:*
  $$\frac{47 + x}{4} = 15 \Longrightarrow 47 + x = 15 \cdot 4 \Longrightarrow 47 + x = 60$$
  $$x = 60 - 47 = 13 \text{ años}$$
- **Resultado:** 13 años

📘 TEMA 30: EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO: MATEMÁTICA FINANCIERA, INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

30.1. ¿Por qué el dinero cambia de valor con el tiempo?

Si alguien te ofrece elegir entre recibir 100 euro **hoy** o recibir 100 euro **dentro de cinco años**, cualquier persona prudente elegirá el dinero hoy. ¿Por qué?

1. **La Inflación:** Con el paso del tiempo, el precio de las cosas (el pan, la vivienda, la energía) suele subir, por lo que 100 euro comprarán menos cosas en el futuro.
2. **El Coste de Oportunidad e Interés:** Si tienes el dinero hoy, puedes invertirlo o depositarlo en un banco para que genere una ganancia o premio por prestarlo. A ese premio se le llama **Interés (I)**.

- **Capital Inicial (C_0 o C):** El dinero que prestas o depositas al principio.
- **Tasa o Tipo de Interés (r o i):** El porcentaje anual acordado (por ejemplo, un 5% anual significa $\frac{5}{100} = 0{,}05$).
- **Tiempo (t):** La cantidad de periodos (normalmente años) que dura la operación.
- **Capital Final (C_f o Montante M):** La suma del dinero inicial más los intereses ganados: $C_f = C_0 + I$.

30.2. El Interés Simple: El premio fijo que no crece

En el **Interés Simple**, los beneficios generados se retiran cada año y no se suman al capital para generar más intereses. El capital base sigue siendo siempre el mismo.

$$\text{Interés Total: } I = C_0 \cdot r \cdot t$$

$$\text{Capital Final: } C_f = C_0 \cdot (1 + r \cdot t)$$

💰 **Ejemplo visual:** Si depositas 1000 euro al 10% anual en interés simple:

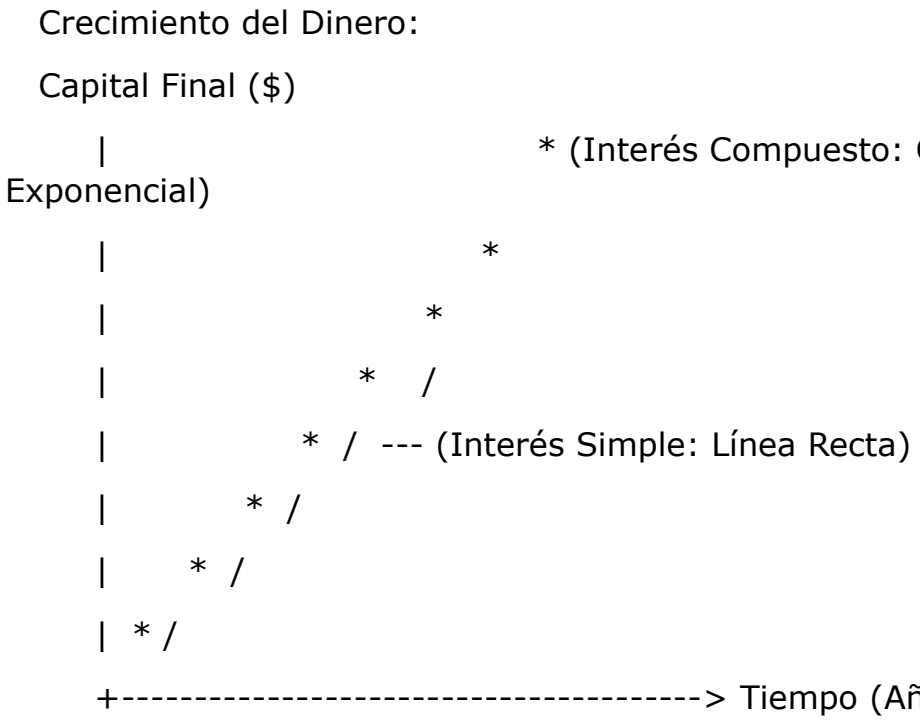
- Año 1: ganas 100 euro.
- Año 2: vuelves a ganar 100 euro.
- Cada año ganas exactamente la misma cantidad fija.

30.3. El Interés Compuesto: La «Fuerza Más Poderosa del Universo»

Albert Einstein llamaba al interés compuesto una de las grandes maravillas del mundo.

En el **Interés Compuesto**, los intereses que ganas al final de cada año **no se retiran**, sino que **se suman al capital** (se capitalizan). Al año siguiente, ¡esos intereses nuevos también generan más intereses por sí mismos! Se produce un crecimiento exponencial (una bola de nieve financiera).

$$C_f = C_0 \cdot (1 + r)^t$$



🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 30.1

Una persona deposita 2000 euro **en una cuenta bancaria a plazo fijo durante** 3 años **a una tasa de interés simple del** 4% **anual.**

- a) ¿Cuánto dinero ganará en concepto de intereses al cabo de los 3 años?
- b) ¿Cuál será el capital final acumulado en la cuenta?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular el Interés Simple (I):**
  - **Paso 1: Identificar y convertir los datos.**
    - Capital inicial: $C_0 = 2000$ euro

        - Tasa en tanto por uno: $r = 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$
        - Tiempo: $t = 3$ años
    - **Paso 2: Aplicar la fórmula $I = C_0 \cdot r \cdot t$.**

$$I = 2000 \cdot 0{,}04 \cdot 3$$

    - **Paso 3: Realizar las multiplicaciones.**

💡 **Inciso pedagógico (Calcular por partes):**

En un solo año se ganan $2000 \cdot 0{,}04 = 80$ euro.

En 3 años: $80 \cdot 3 = 240$ euro.

$$I = 240 \text{ euro}$$

- **Apartado b) Calcular el Capital Final (C_f):**
    - Sumamos el capital original más los intereses generados:

$$C_f = C_0 + I = 2000 + 240 = 2240 \text{ euro}$$

- **Resultado final: a) Ganará 240 euro de intereses; b) El capital final será de 2240 euro.**

Ejercicio Resuelto 30.2

Invertimos 5000 euro en un fondo de inversión que ofrece una rentabilidad del 10% anual con interés compuesto (reinversión automática de beneficios). ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 3 años?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar la fórmula del interés compuesto y los datos.**
    - $C_0 = 5000$ euro
    - $r = 10\% = 0{,}10$
    - $t = 3$ años

$$C_f = C_0 \cdot (1 + r)^t$$

- **Paso 2: Sustituir los valores numéricos.**

$$C_f = 5000 \cdot (1 + 0{,}10)^3 = 5000 \cdot (1{,}10)^3$$

- **Paso 3: Calcular la potencia $(1{,}10)^3$ respetando la jerarquía PEMDAS.**

💡 **Inciso pedagógico (Cálculo del factor de crecimiento):**

$$(1{,}10)^2 = 1{,}21$$

$$(1{,}10)^3 = 1{,}21 \cdot 1{,}10 = 1{,}331$$

- **Paso 4: Multiplicar por el capital inicial.**

$$C_f = 5000 \cdot 1{,}331 = 6655 \text{ euro}$$

- **Paso 5: Comparación didáctica con el interés simple.**
  - Con interés simple habríamos ganado 500 euro por año (1500 euro en total $\rightarrow 6500$ euro).
  - Con interés compuesto obtenemos 6655 euro (los 155 euro adicionales son los intereses producidos por los propios intereses).
- **Resultado final: El capital final será de** 6655 euro**.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 30.1:** Un banco presta 1200 euro al 5% de interés simple anual durante 4 años. ¿Cuánto dinero en concepto de intereses se habrá pagado al finalizar el préstamo?

(Solución indicada: 240 euro*)*

2. **Propuesto 30.2:** Colocamos 1000 euro en un depósito al 20% de interés compuesto anual durante 2 años. ¿Cuál es el capital final acumulado?

(Solución indicada: 1440 euro*)*

3. **Propuesto 30.3:** Una bicicleta cuesta 300 euro. La tienda nos ofrece pagarla dentro de 6 meses con un recargo por interés simple del 6% anual. ¿Cuánto pagaremos por la bicicleta al cabo de los 6 meses? *(Pista:* 6 meses $= 0{,}5$ años*)*.

(Solución indicada: 309 euro*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 30.1

- **Enunciado:** $C_0 = 1200$ euro, $r = 5\% = 0{,}05$, $t = 4$ años. Interés simple.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $I = C_0 \cdot r \cdot t$.
  2. *Sustitución y cálculo:*

$$I = 1200 \cdot 0{,}05 \cdot 4 = 1200 \cdot 0{,}20 = 240 \text{ euro}$$

- **Resultado:** 240 euro

Solución del Propuesto 30.2

- **Enunciado:** $C_0 = 1000$ euro, $r = 20\% = 0{,}20$, $t = 2$ años. Interés compuesto.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $C_f = C_0 \cdot (1 + r)^t$.
  2. *Sustitución:*
  $$C_f = 1000 \cdot (1 + 0{,}20)^2 = 1000 \cdot (1{,}2)^2$$
  3. *Cálculo:* $(1{,}2)^2 = 1{,}44 \Longrightarrow 1000 \cdot 1{,}44 = 1440$ euro.
- **Resultado:** 1440 euro

Solución del Propuesto 30.3

- **Enunciado:** $C_0 = 300$ euro, $r = 6\% = 0{,}06$, $t = 6$ meses $= 0{,}5$ años.
- **Desarrollo:**
  1. *Cálculo del interés:*
  $$I = C_0 \cdot r \cdot t = 300 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}5 = 18 \cdot 0{,}5 = 9 \text{ euro}$$
  2. *Capital total a pagar:*
  $$C_f = C_0 + I = 300 + 9 = 309 \text{ euro}$$
- **Resultado:** 309 euro

📘 TEMA 31: EL LENGUAJE DE LAS CAJAS Y TABLAS NUMÉRICAS: INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES Y DETERMINANTES

31.1. ¿Qué es una Matriz? Una tabla organizada de datos

En la vida real y en la informática, muchas veces tenemos que manejar listas enormes de datos simultáneos (por ejemplo, el inventario de varias tiendas, los píxeles de una pantalla o las coordenadas 3D de un videojuego).

Una **Matriz** es una tabla rectangular de números ordenados en **filas** (horizontales) y **columnas** (verticales), encerrada entre corchetes o paréntesis grandes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Dimensión o Tamaño ($m \times n$):**

Se nombra siempre diciendo primero el número de filas (m) y luego el de columnas (n):

  - La matriz Aanterior tiene 2**filas** y 3**columnas**, por lo que su dimensión es 2×3.

- **Matriz Cuadrada:** Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas (por ejemplo, 2×2o 3×3).

31.2. Operaciones Básicas con Matrices

1. Suma y Resta de Matrices (Posición a Posición)

Solo se pueden sumar o restar matrices que tengan **exactamente la misma dimensión**. Se opera número a número en la misma posición:

2. Multiplicación por un Número Escalar

El número de fuera multiplica a **todos y cada uno** de los elementos del interior:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

31.3. ¿Qué es un Determinante? La Huella Digital de una Matriz Cuadrada

Un **Determinante** es un único número que resume las propiedades geométricas y algebraicas de una matriz cuadrada. Se escribe entre barras verticales rectas: $|A|$o $\det(A)$.

⚔️ La Regla del Producto Cruzado para Matrices 2×2:

Multiplicamos la diagonal principal (de arriba-izquierda a abajo-derecha) y le **restamos** el producto de la diagonal secundaria (de abajo-izquierda a arriba-derecha):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

- Si el determinante de una matriz es distinto de cero ($\det(A) \neq 0$), el sistema de ecuaciones asociado tiene solución única y la matriz tiene inversa.

📝 EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 31.1

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula la matriz resultado de $2A + B$.
- b) Halla la dimensión de la matriz resultante.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular $2A + B$:**
  - **Paso 1: Multiplicar la matriz Apor el escalar 2:**

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

  - **Paso 2: Sumar la matriz resultante con la matriz Btérmino a término:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  - **Paso 3: Operar cada posición respetando los signos:**
    - Fila 1, Columna 1: $6 + 0 = 6$
    - Fila 1, Columna 2: $2 + (-5) = 2 - 5 = -3$
    - Fila 2, Columna 1: $-4 + 2 = -2$
    - Fila 2, Columna 2: $8 + 1 = 9$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Apartado b) Dimensión:**
  - La matriz tiene 2filas y 2columnas: dimensión 2×2.
- **Resultado final:** $2A + B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$**(Dimensión** 2×2**)**

Ejercicio Resuelto 31.2

Calcula el determinante de la siguiente matriz cuadrada 2×2:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Escribir el determinante con barras rectas y aplicar la fórmula cruzada:**

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

- **Paso 2: Calcular el producto de la diagonal principal:**

$$5 \cdot 4 = 20$$

- **Paso 3: Calcular el producto de la diagonal secundaria:**

$$3 \cdot 2 = 6$$

- **Paso 4: Restar ambas cantidades:**

💡 **Inciso pedagógico (Orden de la resta):** Siempre restamos la diagonal secundaria a la principal:

$$|M| = 20 - 6 = 14$$

- **Resultado final:** $|M| = 14$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 31.1:** Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la resta de matrices $P - Q$.

(Solución indicada: $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$)

2. **Propuesto 31.2:** Calcula el determinante de la matriz $K = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. *(¡Atención al signo menos en la resta!)*

(Solución indicada: $|K| = 11$)

3. **Propuesto 31.3:** ¿Para qué valor de $x$el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} x & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$es igual a 0?

(Solución indicada: $x = 4$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 31.1

- **Enunciado:** $P - Q = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
- **Desarrollo:**
    1. Restamos posición a posición:
        - Fila 1: $4 - 1 = 3$; $7 - 2 = 5$
        - Fila 2: $1 - 5 = -4$; $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$
- **Resultado:** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Solución del Propuesto 31.2

- **Enunciado:** Determinante de $K = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- **Desarrollo:**
    1. *Diagonal principal:* $3 \cdot 1 = 3$.
    2. *Diagonal secundaria:* $(-2) \cdot 4 = -8$.
    3. *Resta:*

$$|K| = 3 - (-8) = 3 + 8 = 11$$

- **Resultado:** $|K| = 11$

Solución del Propuesto 31.3

- **Enunciado:**
- **Desarrollo:**
    1. *Plantear el determinante:*

$$(x \cdot 3) - (6 \cdot 2) = 0$$

    2. *Resolver la ecuación:*

$$3x - 12 = 0 \Longrightarrow 3x = 12 \Longrightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

- **Resultado:** $x = 4$

📘 TEMA 32: LA LÓGICA DE LAS DECISIONES Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL: ÁLGEBRA DE BOOLE, CONECTORES Y ALGORITMOS

32.1. ¿Qué es la Lógica Matemática? La ciencia de los argumentos sin trampas

En el lenguaje cotidiano decimos cosas ambiguas o subjetivas (como «hace buen día» o «las matemáticas son difíciles»). Pero para la ciencia y la informática, necesitamos declaraciones precisas que solo puedan ser verdaderas o falsas.

- **Proposición lógica (p, q, r):** Es una afirmación que solo tiene **dos estados posibles**:
  - **Verdadero (V o 1)**
  - **Falso (F o 0)**
- El matemático inglés George Boole descubrió que la lógica humana se podía resolver como si fuera aritmética, dando origen al **Álgebra de Boole**, la base del funcionamiento de todos los procesadores y circuitos digitales modernos.

32.2. Los Tres Conectores Lógicos Fundamentales (Operadores Booleanos)

Conector Lógico	Símbolo	Nombre Booleano	Regla de la verdad
Negación (NO)	$\neg p$	NOT	Invierte el valor (si es V pasa a F, y si es F pasa a V).
Conjunción (Y)	$p \wedge q$	AND	Es **Verdadero solo si AMBOS** son verdaderos a la vez.
Disyunción (O)	$p \vee q$	OR	Es **Verdadero si AL MENOS UNO** de los dos es verdadero.

🚦 **Ejemplo de la vida cotidiana:**

- «Para entrar al cine necesitas entrada (p) **Y** autorización (q)» → Si falta una de las dos cosas, no entras (AND).

- «Para pagar aceptamos tarjeta (p) **O** efectivo (q)» → Con que lleves una de las dos opciones, puedes pagar (OR).

32.3. Tablas de Verdad: El Mapa de Todas las Posibilidades

Una **Tabla de Verdad** evalúa todas las combinaciones posibles de entrada para saber el resultado final de una expresión lógica:

p	q	¬p (NO p)	p∧q (p Y q)	p∨q (p O q)
1	**1**	0	**1**	**1**
1	**0**	0	**0**	**1**
0	**1**	1	**0**	**1**
0	**0**	1	**0**	**0**

32.4. Pensamiento Computacional y Algoritmos: La Receta Paso a Paso

Un **algoritmo** es un conjunto finito de instrucciones ordenadas, claras y sin ambigüedades diseñadas para resolver un problema o realizar una tarea.

Todo algoritmo sigue una estructura de tres fases:

Entrada (Datos) ⟶ Proceso (Instrucciones condicionales / Bucles) ⟶ Salida (Resultado)

- **Condicional (SI ... ENTONCES ... SI NO):** Toma caminos distintos según el resultado de una prueba lógica.
- **Bucle (MIENTRAS ... HACER o REPETIR):** Ejecuta una acción de forma repetitiva hasta que se cumpla una condición de parada.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 32.1

Determina el valor de verdad final de la siguiente proposición compuesta:

$$E = (\neg p \vee q) \wedge p$$

Sabiendo que $p = 1$ (Verdadero) y $q = 0$ (Falso).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Evaluar la negación ($\neg p$).**
  - Como $p = 1$, su opuesto es:

$$\neg p = 0$$

- **Paso 2: Evaluar el interior del paréntesis $(\neg p \vee q)$.**
  - Sustituimos los valores dentro del paréntesis: $(0 \vee 0)$.
  - Aplicamos la regla del operador OR ($\vee$): una disyunción solo es verdadera si al menos uno es verdadero.
  - Como ambos son 0:

$$(0 \vee 0) = 0$$

- **Paso 3: Operar la conjunción final con la variable exterior ($0 \wedge p$).**
  - Sustituimos la p original ($p = 1$):

$$0 \wedge 1$$

  - Aplicamos la regla del operador AND ($\wedge$): una conjunción exige que ambas partes sean 1.
  - Como la primera parte es 0:

$$0 \wedge 1 = 0$$

- **Resultado final: La proposición es Falsa (0).**

Ejercicio Resuelto 32.2

Analiza el siguiente algoritmo y determina qué valor final mostrará en pantalla la variable suma:

Plaintext

```
Inicio:
  suma = 0
  contador = 1
  Mientras contador <= 4 Hacer:
     suma = suma + contador
     contador = contador + 1
  Fin Mientras
```

Mostrar(suma)

Fin

Desarrollo íntegro paso a paso (Traza de ejecución):

- **Estado inicial:**

suma = 0, contador = 1

- **Vuelta 1 del bucle:**
  - ¿contador <= 4? ($1 \leq 4 \rightarrow$ Sí, entra).
  - suma = 0 + 1 = 1
  - contador = 1 + 1 = 2
- **Vuelta 2 del bucle:**
  - ¿contador <= 4? ($2 \leq 4 \rightarrow$ Sí, entra).
  - suma = 1 + 2 = 3
  - contador = 2 + 1 = 3
- **Vuelta 3 del bucle:**
  - ¿contador <= 4? ($3 \leq 4 \rightarrow$ Sí, entra).
  - suma = 3 + 3 = 6
  - contador = 3 + 1 = 4
- **Vuelta 4 del bucle:**
  - ¿contador <= 4? ($4 \leq 4 \rightarrow$ Sí, entra).
  - suma = 6 + 4 = 10
  - contador = 4 + 1 = 5
- **Comprobación de salida:**
  - ¿contador <= 4? ($5 \leq 4 \rightarrow$ Falso, el bucle termina).
  - Se ejecuta Mostrar(suma).

💡 **Inciso pedagógico (Cálculo del sumatorio):** Este algoritmo calcula la suma de los primeros 4 números enteros consecutivos: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

- **Resultado final: El algoritmo muestra el número 10.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 32.1:** Evalúa el valor de verdad de la expresión $(p \wedge q) \vee \neg q$ cuando $p = 0$ y $q = 1$.

(Solución indicada: 0 o Falso)

2. **Propuesto 32.2:** Construye la tabla de verdad de la expresión $A = \neg(p \wedge q)$ para todas las combinaciones posibles de p y q.

(Solución indicada: Para $(1,1) \rightarrow 0$; para $(1,0), (0,1), (0,0) \rightarrow 1$)

3. **Propuesto 32.3:** Si ejecutamos el siguiente fragmento con la entrada $N = 7$, ¿qué mensaje se imprimirá en pantalla?

Plaintext

Si N % 2 == 0 Entonces:

    Mostrar("Número Par")

Si No:

    Mostrar("Número Impar")

Fin Si

(Nota: N % 2 calcula el resto de dividir N entre 2).

(Solución indicada: Imprime "Número Impar")

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 32.1

- **Enunciado:** Evaluar $(p \wedge q) \vee \neg q$ con $p = 0, q = 1$.
- **Desarrollo:**
    1. *Paréntesis $(p \wedge q)$:* $0 \wedge 1 = 0$.
    2. *Negación $\neg q$:* $\neg(1) = 0$.
    3. *Disyunción final:* $0 \vee 0 = 0$.
- **Resultado:** 0 **(Falso)**

Solución del Propuesto 32.2

- **Enunciado:** Tabla de verdad de $\neg(p \wedge q)$ (Compuerta NAND).
- **Desarrollo:**
    1. Evaluamos $p \wedge q$ para cada fila:
        - Si $p = 1, q = 1 \Longrightarrow p \wedge q = 1 \Longrightarrow \neg(1) = 0$.

- Si $p = 1, q = 0 \Longrightarrow p \wedge q = 0 \Longrightarrow \neg(0) = 1$.
- Si $p = 0, q = 1 \Longrightarrow p \wedge q = 0 \Longrightarrow \neg(0) = 1$.
- Si $p = 0, q = 0 \Longrightarrow p \wedge q = 0 \Longrightarrow \neg(0) = 1$.

- **Resultado: Columna final:** $0,1,1,1$

Solución del Propuesto 32.3

- **Enunciado:** Ejecutar condicional con $N = 7$.
- **Desarrollo:**
  1. Calculamos el operador módulo (resto de la división entera): $7 \div 2 = 3$ con resto 1.
  2. Evaluamos la condición: ¿$1 == 0$? Es **Falso**.
  3. Al ser falsa la condición del Si, el flujo salta a la rama Si No.
  4. Se ejecuta la instrucción: Mostrar("Número Impar").
- **Resultado: Imprime "Número Impar"**

📘 TEMA 33: LA TEORÍA DE GRAFOS, REDES Y LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG

33.1. El Problema Histórico de Königsberg y el Nacimiento de los Grafos

En 1736, la ciudad prusiana de Königsberg (hoy Kaliningrado) tenía **cuatro zonas de tierra** separadas por el río Pregel, unidas entre sí por **siete puentes**.

Los ciudadanos se preguntaban: *«¿Es posible dar un paseo saliendo de cualquier punto, cruzar cada uno de los siete puentes exactamente una sola vez y volver al punto de partida?»*

El matemático suizo **Leonhard Euler** demostró que **era imposible**, y al hacerlo inventó una nueva rama de las matemáticas: la **Teoría de Grafos y Topología**.

33.2. ¿Qué es un Grafo? Los Elementos de una Red

Euler comprendió que no importaba la longitud de las calles ni el tamaño de los puentes; solo importaba **cómo estaban conectados entre sí**.

Un **Grafo** $G = (V, E)$ está formado por dos elementos esenciales:

- ⭕ **Vértices o Nodos (V):** Son los puntos que representan los lugares, personas, ordenadores o servidores.
- ➖ **Aristas o Enlaces (E):** Son las líneas (rectas o curvas) que unen pares de vértices, representando caminos, cables o relaciones de amistad.

33.3. Grado de un Vértice y el Teorema de Euler

- **Grado de un Vértice ($\deg(v)$):** Es el **número de aristas que se conectan directamente a ese nodo**.
  - Si el grado es un número par ($2,4,6 \ldots$), es un **vértice par**.
  - Si el grado es un número impar ($1,3,5 \ldots$), es un **vértice impar**.

👑 **Teorema de los Caminos Eulerianos:**

Para poder recorrer un grafo entero **pasando por cada arista exactamente una vez sin levantar el lápiz**:

1. **Circuito Euleriano (Empieza y acaba en el mismo nodo):** **TODOS** los vértices del grafo deben tener **grado par**.
2. **Camino Euleriano (Empieza en un nodo y acaba en otro diferente):** Debe haber **exactamente 2 vértices de grado impar** (el de salida y el de llegada) y todos los demás deben ser pares.
3. Si hay **más de 2 vértices impares**, ¡es totalmente imposible dibujarlo sin repetir líneas! *(En Königsberg los cuatro nodos eran impares)*.

33.4. El Lema del Apretón de Manos (Handshaking Lemma)

En cualquier grafo del universo, la suma de los grados de todos sus vértices es igual al **doble del número total de aristas**:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

(Consecuencia: el número de vértices con grado impar en cualquier red siempre es un número par).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 33.1

El famoso acertijo del sobre cerrado:

Queremos dibujar de un solo trazo continuo (sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ninguna línea) la figura de una «casita» o sobre cerrado, formada por un cuadrado de 4 vértices en la base con sus dos diagonales cruzadas y un triángulo en el tejado con un vértice superior (en total 5 vértices).

- a) Calcula el grado de cada uno de los 5 vértices.
- b) Determina si es posible dibujarlo de un solo trazo y explica por qué nodo se debe empezar.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Analizar las conexiones de cada vértice:**
  - **Vértice superior del tejado (T):** Se conecta con las dos esquinas superiores del cuadrado $\rightarrow \deg(T) = 2$ (Par).
  - **Esquinas superiores del cuadrado (A y B):** Se conectan al tejado, al lado horizontal superior, al lado vertical hacia abajo y a una diagonal interna $\rightarrow \deg(A) = 4$, $\deg(B) = 4$ (Pares).
  - **Esquinas inferiores del cuadrado (C y D):** Se conectan a la base horizontal, al lado vertical hacia arriba y a la diagonal interna $\rightarrow \deg(C) = 3$, $\deg(D) = 3$ (Impares).
- **Paso 2: Contar cuántos vértices de grado impar existen:**
  - Vértices pares: 3 (el tejado T, y las esquinas A, B).
  - Vértices impares: 2 (las esquinas inferiores C y D).
- **Paso 3: Aplicar el Teorema de Euler:**

💡 **Inciso pedagógico (Condición de trazo unilineal):** Como el grafo tiene exactamente **dos vértices de grado impar**, **SÍ es posible dibujarlo de un solo trazo**.

  - Para lograrlo con éxito, **es obligatorio empezar a dibujar en uno de los dos vértices impares** (por ejemplo, en C) y el recorrido terminará obligatoriamente en el otro vértice impar (D).

- **Resultado final: a) Grados: $\{2,4,4,3,3\}$; b) Sí es posible; se debe comenzar en una de las esquinas inferiores (C o D).**

Ejercicio Resuelto 33.2

En una red informática local hay 6 servidores. Se sabe que las conexiones de red de los servidores tienen los siguientes grados: $3,2,4,2,3,2$. ¿Cuántos cables de red (aristas) se necesitan en total para interconectar el sistema?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Aplicar el Lema del Apretón de Manos:**

$$\sum \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

- **Paso 2: Sumar los grados de todos los nodos de la red:**

$$\text{Suma de grados} = 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 2 = 16$$

- **Paso 3: Despejar el número total de aristas ($|E|$):**

$$2 \cdot |E| = 16$$

$$|E| = \frac{16}{2} = 8$$

- **Resultado final: Se necesitan** 8 cables de red (aristas)**.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 33.1:** Un grafo simple tiene 5 vértices y cada uno de ellos tiene grado 4 (grafo completo K_5). ¿Cuántas aristas tiene el grafo en total?

(Solución indicada: 10 aristas*)*

2. **Propuesto 33.2:** Clasifica los siguientes grafos según si se pueden recorrer de un solo trazo sin repetir líneas:
    - a) Grafo con grados en sus vértices: $\{2,2,4,4,2\}$
    - b) Grafo con grados en sus vértices: $\{3,3,3,3\}$

(Solución indicada: a) Sí, es un circuito cerrado euleriano (todos pares); b) No es posible (4 impares))

3. **Propuesto 33.3:** En una fiesta hay 5 amigos. ¿Es posible que cada uno de ellos haya saludado con un apretón de manos exactamente a 3 personas del grupo? *(Pista: piensa en la suma de grados)*.

(Solución indicada: No es posible, la suma de grados sería impar: $5 \cdot 3 = 15$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 33.1

- **Enunciado:** 5 vértices, cada uno con grado 4.
- **Desarrollo:**
    1. *Suma de grados:* $5 \cdot 4 = 20$.
    2. *Lema de apretón de manos:* $2 \cdot |E| = 20 \Longrightarrow |E| = \frac{20}{2} = 10$ aristas.
- **Resultado:** 10 aristas

Solución del Propuesto 33.2

- **Enunciado:** Analizar grafos a) $\{2,2,4,4,2\}$ y b) $\{3,3,3,3\}$.
- **Desarrollo:**
    1. *Caso a:* Todos los vértices tienen grado par (0 impares). Por el Teorema de Euler, admite un circuito euleriano completo volviendo al inicio.
    2. *Caso b:* Los 4 vértices son impares. Al superar los 2 vértices impares permitidos, es matemáticamente imposible trazarlo sin repetir aristas.
- **Resultado: a) Sí es posible (circuito cerrado); b) Imposible**

Solución del Propuesto 33.3

- **Enunciado:** 5 personas con grado 3 cada una.
- **Desarrollo:**
    1. *Suma de grados:* $5 \cdot 3 = 15$.
    2. *Propiedad:* Cada apretón de manos involucra a 2 personas (aporta $+2$ a la suma total), por lo que la suma de grados debe ser siempre un número par.
    3. Como 15 es un número impar, tal configuración no puede existir en la realidad.
- **Resultado: No es posible (la suma de grados debe ser par)**

📘 TEMA 34: LA GEOMETRÍA DE LA NATURALEZA Y EL INFINITO: FRACTALES Y TEORÍA DEL CAOS

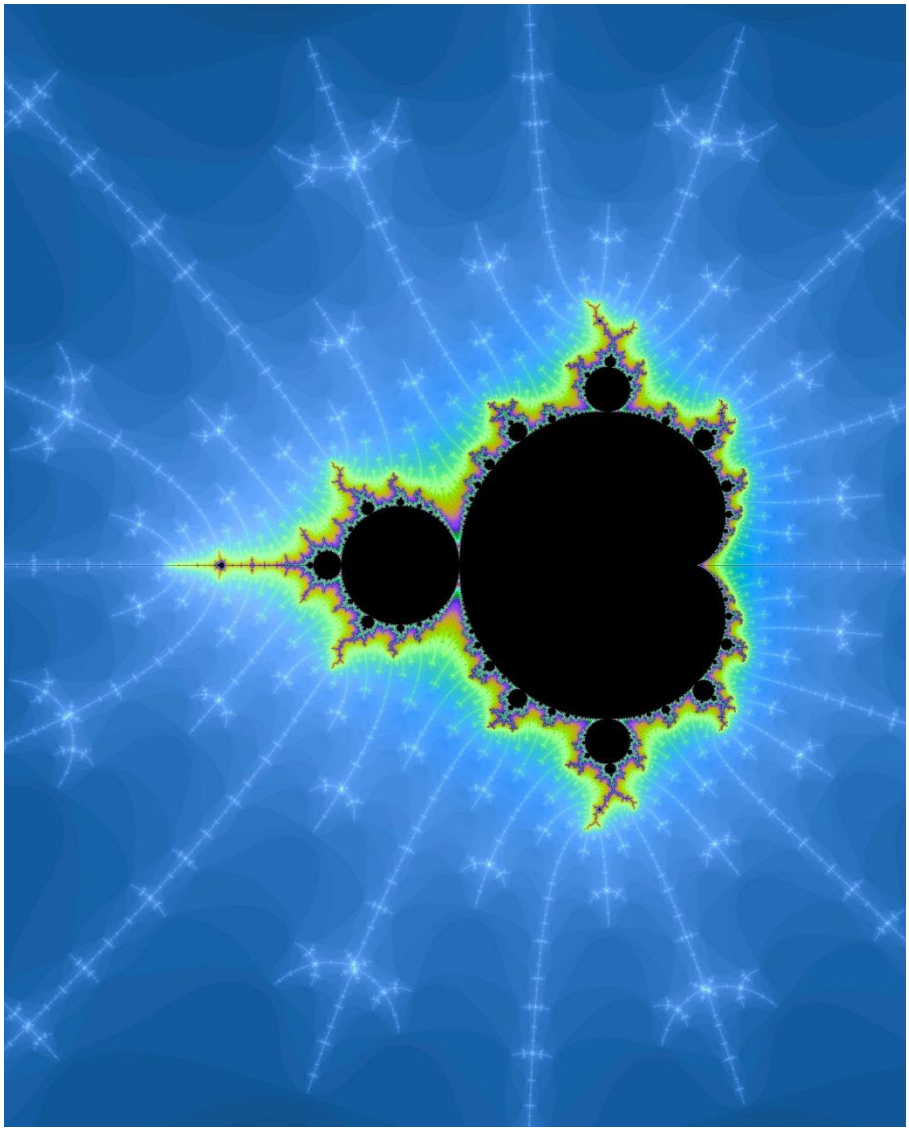
34.1. Cuando la Geometría Clásica se queda Corta

La geometría tradicional de Euclides estudia líneas rectas perfectas, círculos suaves, conos y esferas. Sin embargo, en el mundo real:

- Las nubes no son esferas.
- Las montañas no son conos perfectos.
- Las costas marítimas no son líneas rectas.
- Los rayos de una tormenta no siguen caminos predecibles.

Para describir estas formas irregulares de la naturaleza, el matemático **Benoît Mandelbrot** acuñó en 1975 el término **Fractal** (del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado).

34.2. ¿Qué es un Fractal? Las Dos Propiedades Fundamentales



Conjunto de Mandelbrot. Fuente: Michael Piepgras / Getty Images

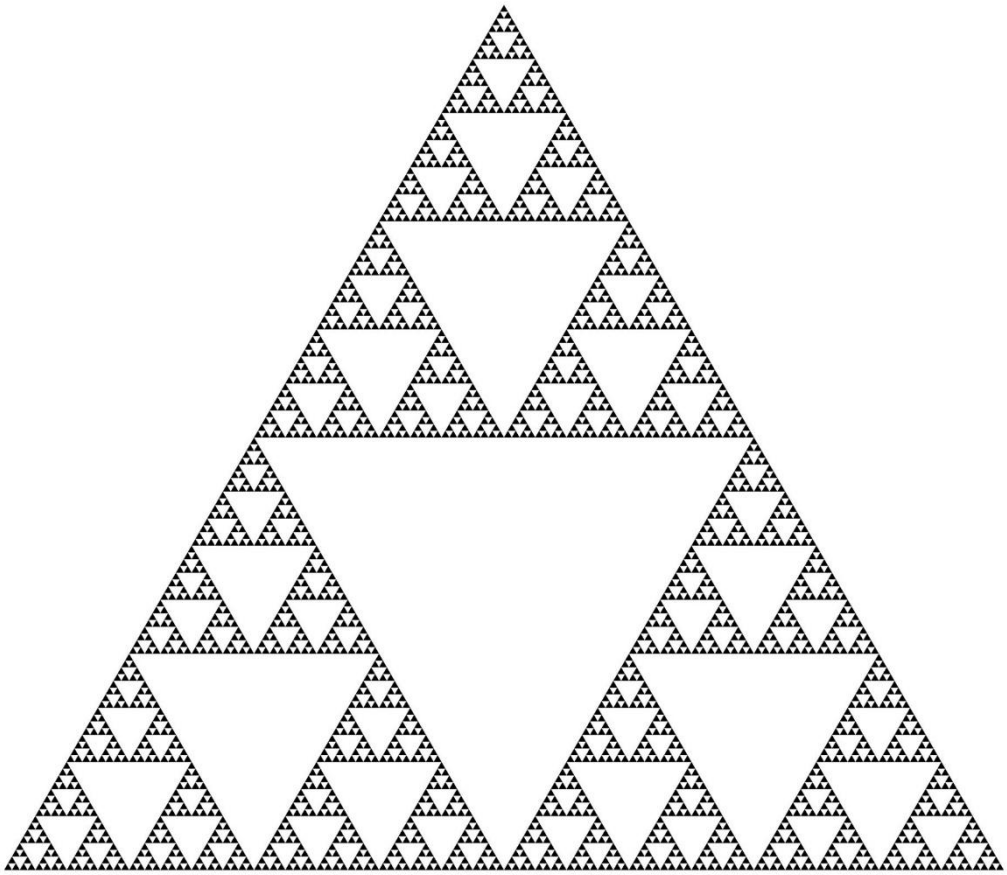
1. 🔍 **Autosemejanza (Auto-similitud):**

Si amplías una pequeña sección del objeto con una lupa o un microscopio, descubres que tiene **exactamente la misma forma que el objeto completo original**. Un trozo pequeño de una rama de brócoli o de un helecho tiene la misma estructura que la planta entera.

2. 🔁 **Iteración Infinita:**

Se construye aplicando una regla matemática sencilla una y otra vez de forma recursiva (en bucle infinito).

34.3. El Triángulo de Sierpiński y la Dimensión Fractal



Triángulo de Sierpiński. Fuente: PeterHermesFurian / Getty Images

El matemático Wacław Sierpiński diseñó uno de los fractales más famosos partiendo de un triángulo equilátero sólido:

1. **Paso 0:** Un triángulo equilátero lleno ($N_0 = 1$).

2. **Paso 1:** Unimos los puntos medios de los lados y quitamos el triángulo central invertido. Quedan 3**triángulos** más pequeños ($N_1 = 3$).
3. **Paso 2:** Repetimos el mismo proceso en cada uno de los triángulos restantes: quedan $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$ triángulos($N_2 = 9$).
4. **Paso k:** El número de triángulos negros en la iteración $k$es:

$$N_k = 3^k$$

📏 **La Dimensión Fractal (D):**

Una línea tiene dimensión 1, un plano tiene dimensión 2y un cubo dimensión 3. Los fractales tienen **dimensiones fraccionarias** situadas en medio.

Por ejemplo, la dimensión del triángulo de Sierpiński es:

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1{,}585$$

(Es más que una simple línea, pero no llega a rellenar una superficie plana completa).

34.4. La Teoría del Caos y el Efecto Mariposa

Descubierta por el meteorólogo Edward Lorenz, la **Teoría del Caos** estudia sistemas dinámicos donde una mínima variación en el punto de partida produce resultados gigantescos e impredecibles con el paso del tiempo.

🦋 **La Metáfora de Lorenz:**

«El aleteo de una mariposa en Brasil puede desatar un tornado en Texas semanas después».

Por este motivo, aunque conozcamos las leyes físicas y matemáticas exactas del clima, es imposible predecir el tiempo meteorológico con total precisión a muchas semanas vista.

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 34.1

En la construcción del Triángulo de Sierpiński:

- a) ¿Cuántos triángulos negros habrá en el paso $4(k = 4)$?

- b) Si el triángulo original del paso 0tenía un área total de 64 cm^2, ¿cuál será el área negra restante en el paso 3? *(Ten en cuenta que en cada paso se conserva solo* $\frac{3}{4}$*del área anterior)*.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Número de triángulos en el paso 4:**
  - Aplicamos la fórmula exponencial de crecimiento $N_k = 3^k$:

$$N_4 = 3^4$$

  - Calculamos la potencia:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

  - Habrá 81 triángulos negros.
- **Apartado b) Área restante en el paso 3:**
  - **Paso 1: Identificar la regla del área.**

Al retirar el triángulo central, en cada iteración queda solo $\frac{3}{4}$del área anterior:

$$\text{Área}_k = \text{Área}_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

  - **Paso 2: Sustituir los datos para $k = 3$:**

$$\text{Área}_3 = 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

  - **Paso 3: Calcular la potencia de la fracción:**

💡 **Inciso pedagógico (Potencia de una fracción):** Elevamos numerador y denominador por separado:

$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$.

  - **Paso 4: Multiplicar y simplificar:**

$$\text{Área}_3 = 64 \cdot \frac{27}{64} = 27 \text{ cm}^2$$

- **Resultado final: a)** 81 triángulos**; b) Área** $= 27$ cm^2

Ejercicio Resuelto 34.2

El Copo de Nieve de Koch comienza con un triángulo equilátero de perímetro 30 cm**(paso 0). En cada nueva iteración, cada segmento recto se divide en tres partes y se le**

añade un pico triangular, de modo que el perímetro total se multiplica por $\frac{4}{3}$.

- ¿Cuál será el perímetro del copo de nieve en el paso 2?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Plantear la fórmula del perímetro iterativo:**

$$P_k = P_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$$

- **Paso 2: Sustituir el perímetro inicial ($P_0 = 30$) y el paso ($k = 2$):**

$$P_2 = 30 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

- **Paso 3: Resolver la potencia:**

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

- **Paso 4: Operar la multiplicación:**

$$P_2 = 30 \cdot \frac{16}{9} = \frac{480}{9}$$

  - Simplificamos dividiendo entre 3 arriba y abajo:

$$\frac{480 \div 3}{9 \div 3} = \frac{160}{3} \approx 53{,}33 \text{ cm}$$

💡 **Inciso pedagógico (La paradoja del fractal):** A medida que $k$tiende a infinito, ¡el perímetro del copo de nieve se vuelve infinitamente largo aunque encierre un área finita!

- **Resultado final:** $P_2 = \frac{160}{3}$ cm $\approx 53{,}33$ cm

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 34.1:** ¿Cuántos triángulos negros tendrá el Triángulo de Sierpiński en el paso $5 (k = 5)$?

(Solución indicada: 243 triángulos*)*

2. **Propuesto 34.2:** Un árbol fractal empieza con 1tronco principal en el paso 0. En cada nuevo paso, cada rama se divide en 2ramas nuevas. ¿Cuántas ramas nuevas nacerán en el paso 6?

(Solución indicada: 64 ramas*)*

3. **Propuesto 34.3:** Si un fractal reduce su superficie a la mitad ($\times \frac{1}{2}$) en cada iteración y partimos de un área inicial de 120 cm^2, ¿cuál será el área tras 3iteraciones?

(Solución indicada: 15 cm^2*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 34.1

- **Enunciado:** Número de triángulos en Sierpiński para $k = 5$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $N_5 = 3^5$.
  2. *Cálculo:* $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.
- **Resultado:** 243 triángulos

Solución del Propuesto 34.2

- **Enunciado:** Ramificación binaria (2^k) en el paso $k = 6$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula de ramas:* $R_6 = 2^6$.
  2. *Cálculo:* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$.
- **Resultado:** 64 ramas

Solución del Propuesto 34.3

- **Enunciado:** Área inicial 120 cm^2, factor $\frac{1}{2}$, iteraciones $k = 3$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $\text{Área}_3 = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.
  2. *Potencia:* $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
  3. *División:* $\frac{120}{8} = 15$ cm^2.
- **Resultado:** 15 cm^2

📘 TEMA 35: LA CIENCIA DE LA INFORMACIÓN OCULTA: CRIPTOGRAFÍA, CLAVES SECRETAS Y EL SISTEMA RSA

35.1. El Arte de Ocultar Mensajes: De Julio César a Internet

La **Criptografía** (del griego *kryptos*, oculto, y *graphein*, escribir) es la disciplina matemática que transforma un mensaje legible en un código incomprensible para que solo quien posea la «clave» adecuada pueda leerlo.

- **Texto en claro (M):** El mensaje original legible (ejemplo: "HOLA").
- **Cifrado (C):** El proceso matemático de codificar el texto.
- **Criptograma (C):** El mensaje cifrado que viaja por la red (ejemplo: "KTÑD").
- **Descifrado:** La operación inversa para recuperar el mensaje original usando la clave.

35.2. Los Dos Grandes Mundos de la Criptografía

1. Criptografía Simétrica (Una Sola Llave Compartida)

El emisor y el receptor usan **la misma clave secreta** tanto para cerrar el candado como para abrirlo.

- 🏛️ **El Cifrado César (Aritmética Modular):**

Consiste en desplazar cada letra del abecedario un número fijo de posiciones (k).

Si asignamos a cada letra un número ($A = 0, B = 1, C = 2, \ldots$ en un abecedario de $N = 27$letras):

$$C \equiv (M + k) \pmod{27}$$

$$M \equiv (C - k) \pmod{27}$$

⚠️ **El Gran Problema:** ¿Cómo le entregas la clave secreta a la otra persona por primera vez a través de Internet sin que nadie la espíe por el camino?

2. Criptografía Asimétrica o de Clave Pública (El Buzón de Correos)

Inventada por Rivest, Shamir y Adleman (**Sistema RSA**), utiliza **dos llaves distintas**:

- 📢 **Clave Pública:** Es visible para todo el mundo. Cualquiera puede usarla para meter una carta en el buzón y cerrarlo con el candado.
- 🔑 **Clave Privada:** Es estrictamente secreta. Solo el dueño del buzón tiene la llave para abrir el candado y leer los mensajes.

35.3. El Secreto Matemático del RSA: La Trampa de los Números Primos

El sistema RSA se basa en una **función trampa (de un solo sentido)**:

1. Es facilísimo y rapidísimo multiplicar dos números primos gigantes (p y q) para obtener un número compuesto enorme:

$$n = p \cdot q$$

2. Pero si solo te dan el número gigante n, ¡a los mejores superordenadores del mundo les llevaría miles de años **descomponerlo en sus factores primos originales** (p y q)!

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 35.1

Cifra la palabra "SOL" utilizando el Cifrado César con una clave de desplazamiento $k = 4$, utilizando el alfabeto español estándar de 27letras ($A = 0, B = 1, \dots, N = 13, \tilde{N} = 14, \dots, Z = 26$).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Asignar el valor numérico a cada letra del mensaje:**
  - Letra **S**: posición 19
  - Letra **O**: posición 15
  - Letra **L**: posición 11
- **Paso 2: Aplicar la fórmula de cifrado con salto $k = 4$:**

$$C \equiv (M + 4) \pmod{27}$$

  - Para **S** (19): $19 + 4 = 23$
  - Para **O** (15): $15 + 4 = 19$
  - Para **L** (11): $11 + 4 = 15$
- **Paso 3: Convertir los números resultantes en letras:**
  - Posición 23 →Letra **W**
  - Posición 19 →Letra **S**
  - Posición 15 →Letra **O**

💡 **Inciso pedagógico (Aritmética modular):** Si al sumar superásemos el número 26, simplemente daríamos la vuelta al

alfabeto volviendo a empezar desde la **A** (0) mediante la operación módulo.

- **Resultado final: El mensaje cifrado es "WSO".**

Ejercicio Resuelto 35.2

En una versión simplificada del algoritmo RSA:

- Elegimos dos números primos pequeños: $p = 5$y $q = 11$.
- a) Calcula el módulo público n.
- b) Calcula el valor de la función de Euler $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular el módulo público n:**
  - Multiplicamos los dos números primos elegidos:

$$n = p \cdot q = 5 \cdot 11 = 55$$

  - El número $n = 55$formará parte de la clave pública accesible a todos.
- **Apartado b) Calcular la función $\phi(n)$:**
  - Aplicamos la fórmula:

$$\phi(n) = (5-1) \cdot (11-1)$$

  - Restamos:

$$\phi(n) = 4 \cdot 10 = 40$$

💡 **Inciso pedagógico (Para qué sirve $\phi(n)$):** El número $\phi(n) = 40$es el secreto matemático que permite fabricar la clave privada de descifrado. Quien no conozca $p = 5$y $q = 11$no puede calcular este valor.

- **Resultado final: a) Módulo público $n = 55$; b) $\phi(n) = 40$**

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 35.1:** Descifra la palabra en clave "KRÑD" que fue codificada con el Cifrado César usando una clave de desplazamiento $k = 3 (A = 0, B = 1, C = 2, D = 3, \ldots)$.

(Solución indicada: "HOLA")

2. **Propuesto 35.2:** En el sistema RSA, si elegimos los números primos $p = 7$y $q = 13$, calcula el módulo público ny el indicador de Euler $\phi(n)$.

(Solución indicada: $n = 91, \quad \phi(n) = 72$*)*

3. **Propuesto 35.3:** Si tenemos un alfabeto de 27letras y ciframos la letra **Z** (26) con una clave César $k = 3$, ¿qué letra cifrada obtendremos aplicando el módulo 27?

*(Solución indicada: Letra **C** (posición* 2*))*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 35.1

- **Enunciado:** Descifrar "KRÑD" con $k = 3$.
- **Desarrollo:**
    1. *Posiciones originales:*
        - **K**: posición $10 \rightarrow 10 - 3 = 7 \rightarrow$**H**
        - **R**: posición $18 \rightarrow 18 - 3 = 15 \rightarrow$**O**
        - **Ñ**: posición $14 \rightarrow 14 - 3 = 11 \rightarrow$**L**
        - **D**: posición $3 \rightarrow 3 - 3 = 0 \rightarrow$**A**
- **Resultado: "HOLA"**

Solución del Propuesto 35.2

- **Enunciado:** $p = 7, q = 13$. Hallar ny $\phi(n)$.
- **Desarrollo:**
    1. *Módulo público:* $n = p \cdot q = 7 \cdot 13 = 91$.
    2. *Función* $\phi(n)$*:* $\phi(n) = (7 - 1)(13 - 1) = 6 \cdot 12 = 72$.
- **Resultado:** $n = 91, \quad \phi(n) = 72$

Solución del Propuesto 35.3

- **Enunciado:** Cifrar letra **Z** (26) con $k = 3$en base 27.
- **Desarrollo:**
    1. *Suma de posiciones:* $26 + 3 = 29$.
    2. *Operación módulo:* $29 \pmod{27} = 29 - 27 = 2$.
    3. *Correspondencia:* La posición 2corresponde a la letra **C** $(A = 0, B = 1, C = 2)$.

- **Resultado: Letra C**

📘 TEMA 36: LA MATEMÁTICA DEL EQUILIBRIO Y LAS DECISIONES ESTRATÉGICAS: TEORÍA DE JUEGOS Y EL EQUILIBRIO DE NASH

36.1. ¿Qué es la Teoría de Juegos?

En las matemáticas clásicas solemos resolver problemas donde el entorno es pasivo (como calcular la trayectoria de una pelota o el área de una figura).

Sin embargo, en la economía, la biología, la política y la vida cotidiana, **tus resultados no dependen solo de lo que tú hagas, sino también de lo que decidan hacer los demás**.

La **Teoría de Juegos** es el estudio matemático de las decisiones estratégicas e interactivas entre agentes racionales (llamados **jugadores**). Fue formalizada por **John von Neumann** y llevada a la fama mundial por el premio Nobel **John Nash**.

36.2. El Dilema del Prisionero: Cuando la lógica individual arruina al grupo

Es el problema más célebre de toda la teoría de juegos:

🚔 **La Historia:**

La policía detiene a dos sospechosos (A y B) de un delito y los encierra en celdas separadas e incomunicadas. A cada uno se le ofrece el mismo trato:

1. Si **uno confiesa (traiciona)** y el **otro calla (coopera)**: el que confiesa sale libre (0 años) y el que calla recibe la pena máxima (10 años).
2. Si **ambos callan (cooperan entre sí)**: la policía solo puede condenar a ambos por una falta menor (1 año a cada uno).
3. Si **ambos confiesan (se traicionan mutuamente)**: ambos reciben una pena intermedia (5 años a cada uno).

Matriz de Pagos (Pérdidas en años de cárcel):

Prisionero A \ Prisionero B	B Calla (Coopera)	B Confiesa (Traiciona)
A Calla (Coopera)	$(-1,-1)$*(Mejor resultado global)*	$(-10,0)$
A Confiesa (Traiciona)	$(0,-10)$	$(-5,-5)$*(Equilibrio de Nash)*

36.3. Estrategia Dominante y el Equilibrio de Nash

- **Estrategia Dominante:** Es una jugada que le da a un jugador el mejor resultado posible **sin importar lo que decida hacer el adversario**.
    - *En el dilema:* Si el otro calla, a ti te conviene confesar (0 vs -1). Si el otro confiesa, a ti también te conviene confesar (-5 vs -10). Por tanto, **confesar es la estrategia dominante** para ambos.
- **El Equilibrio de Nash:** Es un estado en el que **ningún jugador tiene incentivos para cambiar su estrategia de forma unilateral**, porque cualquier cambio individual empeoraría su resultado.

💡 **La Paradoja de Nash:**

Cuando cada individuo busca egoístamente su propio beneficio por separado, el sistema acaba en un resultado peor para todos (5 años cada uno) que si hubieran cooperado (1 año cada uno).

36.4. Juegos de Suma Cero

Un juego es de **suma cero** cuando la ganancia exacta de un jugador equivale a la pérdida idéntica del otro (el total siempre suma 0).

- Ejemplos clásicos: El ajedrez, el póker, el tres en raya o el juego de *Piedra, Papel o Tijera*.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 36.1

Dos empresas de telefonía rivales (E_1 y E_2) deben decidir si gastar dinero en una campaña publicitaria agresiva o mantener un perfil bajo sin publicidad. La matriz de beneficios netos (en millones de euros) es:

$E_1 \backslash E_2$	E_2**Sin Publicidad**	E_2**Con Publicidad**
E_1**Sin Publicidad**	$(10,10)$	$(2,12)$
E_1**Con Publicidad**	$(12,2)$	$(6,6)$

- a) Determina si existe una estrategia dominante para la Empresa 1 (E_1).
- b) Encuentra el Equilibrio de Nash del juego.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Analizar las opciones de E_1:**
  - Si E_2decide **No hacer publicidad**:
    - E_1gana 10 Meurosin publicidad o 12 Meuro**con publicidad** (le conviene hacer publicidad).
  - Si E_2decide **Hacer publicidad**:
    - E_1gana 2 Meurosin publicidad o 6 Meuro**con publicidad** (le conviene hacer publicidad).

💡 **Inciso pedagógico (Detección de estrategia dominante):** En ambos casos, haga lo que haga su rival, E_1siempre gana más dinero invirtiendo en publicidad ($12 > 10$ y $6 > 2$). Por tanto, **«Con Publicidad» es la estrategia dominante**.

- **Apartado b) Analizar a E_2y hallar el Equilibrio de Nash:**
  - Como el juego es simétrico, para E_2la estrategia dominante también es **«Con Publicidad»**.
  - Si ambas empresas eligen hacer publicidad, llegamos a la casilla $(6,6)$.
  - **Comprobación de estabilidad (Nash):**
    - Si E_1cambia unilateralmente a "Sin Publicidad", su beneficio cae de 6a 2.
    - Si E_2cambia unilateralmente a "Sin Publicidad", su beneficio cae de 6a 2.
    - Ninguna tiene motivos para moverse por su cuenta.
- **Resultado final: a) La estrategia dominante para E_1es «Con Publicidad»; b) El Equilibrio de Nash es (Con Publicidad, Con Publicidad) con beneficios $(6,6)$.**

Ejercicio Resuelto 36.2

En un juego de suma cero de penalti de fútbol entre un Delantero y un Portero:

- El delantero puede chutar a la **Izquierda (I)** o a la **Derecha (D)**.
- El portero se lanza a la **Izquierda (I)** o a la **Derecha (D)**.
- Si el portero acierta el lado, la probabilidad de gol es 0(gana el portero, $+1$).
- Si el portero no acierta el lado, es gol seguro (gana el delantero, $+1$).

¿Existe un equilibrio de Nash en estrategias puras (una única jugada fija)?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Construir la matriz de pagos (Puntos del Delantero):**

Delantero \ Portero	**Portero elige Izquierda (I)**	**Portero elige Derecha (D)**
Delantero tira a la Izquierda (I)	-1	$+1$
Delantero tira a la Derecha (D)	$+1$	-1

- **Paso 2: Comprobar la estabilidad de cada casilla:**
  - Si estamos en (I, I): El delantero quiere cambiar a Dpara marcar gol ($+1$).
  - Si estamos en (D, I): El portero quiere cambiar a Dpara parar el penalti (pasar de -1a $+1$).
  - Si estamos en (D, D): El delantero quiere cambiar a I.
  - Si estamos en (I, D): El portero quiere cambiar a I.
- **Paso 3: Conclusión:**

💡 **Inciso pedagógico (Estrategias Mixtas):** En ningún punto ambos jugadores están conformes a la vez. Siempre que uno juega una dirección predecible, el otro se adapta para vencerlo. Por tanto, **no existe equilibrio en estrategias puras**. La solución óptima es una **Estrategia Mixta**: lanzar una moneda al aire y elegir al azar 50%izquierda y 50%derecha para ser impredecible.

- **Resultado final: No existe equilibrio en estrategias puras; la solución óptima es la estrategia mixta aleatoria (50% a cada lado).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 36.1:** Dos sospechosos tienen la siguiente matriz de años de cárcel. Determina el resultado del Equilibrio de Nash:

$A \backslash B$	B**Niega**	B**Confiesa**
A**Niega**	$(-2,-2)$	$(-8,0)$
A**Confiesa**	$(0,-8)$	$(-4,-4)$

(Solución indicada: Ambos confiesan, obteniendo $(-4,-4)$*)*

2. **Propuesto 36.2:** En el juego de «Piedra, Papel o Tijera», ¿es una estrategia ganadora fija jugar siempre «Piedra» en todas las rondas? Justifica matemáticamente mediante teoría de juegos.

(Solución indicada: No, porque el rival cambiará a «Papel» y ganará siempre. El único equilibrio es la estrategia mixta equilibrada de $\frac{1}{3}$*para cada opción)*.

3. **Propuesto 36.3:** En un duopolio de gasolineras, si ambas ponen precios altos ganan 5000 euroal día cada una. Si una baja el precio y la otra no, la que baja gana 7000 euroy la otra 1000 euro. Si ambas bajan precios, ganan 3000 eurocada una. ¿Cuál es la estrategia dominante para ambas?

(Solución indicada: Bajar los precios)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 36.1

- **Enunciado:** Hallar el Equilibrio de Nash para la matriz dada.
- **Desarrollo:**
    1. *Para el jugador A:* Si Bniega, a Ale conviene confesar ($0 > -2$). Si Bconfiesa, a Ale conviene confesar ($-4 > -8$). Su estrategia dominante es **Confesar**.
    2. *Para el jugador B:* Por simetría idéntica, su estrategia dominante es **Confesar**.

3. Al coincidir ambas estrategias dominantes, la casilla resultante es **(Confiesa, Confiesa)**.

- **Resultado: Equilibrio de Nash en** $(-4, -4)$

Solución del Propuesto 36.2

- **Enunciado:** Evaluar si jugar siempre Piedra es una estrategia óptima.
- **Desarrollo:**
  1. Un juego de suma cero sin equilibrio puro no permite predecibilidad.
  2. Si un jugador adopta una estrategia pura constante ($P(\text{Piedra}) = 1$), el oponente racional elegirá $P(\text{Papel}) = 1$, maximizando su pago y reduciendo el del primero a -1en cada partida.
  3. El equilibrio de Nash solo se alcanza cuando ningún rival puede explotar la elección del otro, lo que exige una distribución de probabilidad uniforme: $P(\text{Piedra}) = P(\text{Papel}) = P(\text{Tijera}) = \frac{1}{3}$.
- **Resultado: No; el equilibrio requiere una estrategia mixta con probabilidad** $\frac{1}{3}$**para cada opción.**

Solución del Propuesto 36.3

- **Enunciado:** Matriz de gasolineras: $(5000,5000)$, $(7000,1000)$, $(1000,7000)$, $(3000,3000)$.
- **Desarrollo:**
  1. Si la gasolinera rival pone precio alto: ganamos 5000(alto) o 7000**(bajo)** →Conviene bajar.
  2. Si la gasolinera rival pone precio bajo: ganamos 1000(alto) o 3000**(bajo)** →Conviene bajar.
  3. En cualquier escenario posible, bajar los precios ofrece una ganancia estrictamente mayor.
- **Resultado: Bajar los precios es la estrategia dominante para ambas.**

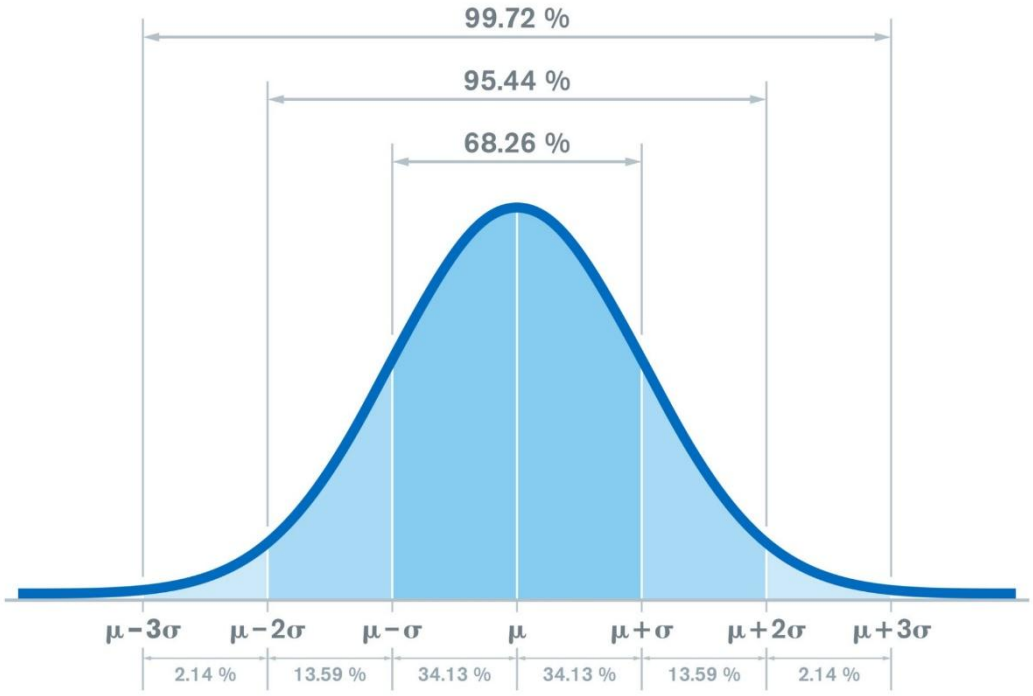
📘 TEMA 38: LA CAMPANA DEL MUNDO: DISTRIBUCIÓN NORMAL, DESVIACIÓN TÍPICA Y LA REGLA EMPÍRICA

38.1. El Orden Oculto en el Caos: La Distribución Normal

Si mides la altura de miles de personas adultas, el peso de las manzanas de un huerto, el cociente intelectual o los errores de fabricación de una máquina, ocurre un fenómeno recurrente:

- La inmensa mayoría de los individuos se concentran **cerca del promedio**.
- Conforme nos alejamos hacia los valores extremos (personas muy altas o muy bajas), los casos se vuelven cada vez más escasos.

Al representar estos datos en un histograma continuo, surge una curva simétrica y suave conocida como la **Campana de Gauss** o **Distribución Normal**: $N(\mu, \sigma)$.



Campana de Gauss y desviaciones típicas. Fuente: PeterHermesFurian / Getty Images

38.2. Los Dos Parámetros Maestros: Centro y Dispersión

Toda distribución normal queda completamente definida por dos valores:

1. **La Media (μ):** Es el centro exacto de la campana (donde se encuentra el pico más alto). Coincide con la mediana y con la moda debido a la simetría perfecta.
2. **La Desviación Típica o Estándar (σ):** Mide **cuánto se abren o se dispersan los datos** alrededor de la media.
    - Si σes pequeña, la campana es estrecha y puntiaguda (datos muy homogéneos).
    - Si σes grande, la campana es ancha y aplanada (datos muy variados).

38.3. La Regla Empírica del 68 - 95 - 99,7

En cualquier distribución normal perfecta se cumplen siempre las siguientes proporciones de probabilidad:

- 🔹 $\mu \pm 1\sigma$**:** Entre la media menos una desviación y la media más una desviación se encuentra el $68{,}26\%$de toda la población.
- 🔹 $\mu \pm 2\sigma$**:** Entre la media menos dos desviaciones y la media más dos desviaciones se concentra el $95{,}44\%$de la población.
- 🔹 $\mu \pm 3\sigma$**:** A tres desviaciones estándar se abarca prácticamente la totalidad: el $99{,}74\%$de los casos.

38.4. Tipificación de Variables (Z): La Escala Universal

Para comparar dos datos que pertenecen a distribuciones con diferentes medias o unidades (por ejemplo, comparar la nota de un examen de Historia sobre 10 con un examen de Selectividad sobre 100), transformamos el valor Xen una variable tipificada estándar $Z \sim N(0{,}1)$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- El valor de Zindica **a cuántas desviaciones estándar por encima (si es positivo) o por debajo (si es negativo)** de la media se encuentra un individuo.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 38.1

Las estaturas de un grupo de 10.000estudiantes siguen una distribución normal con media $\mu = 170$ cmy desviación típica $\sigma = 5$ cm($N(170{,}5)$**).**

- a) ¿Entre qué alturas se encuentra el 68%central de los estudiantes?
- b) ¿Qué porcentaje de estudiantes mide más de 180 cm?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Intervalo del 68%central ($\mu \pm 1\sigma$):**
  - Límite inferior: $\mu - 1\sigma = 170 - 5 = 165$ cm
  - Límite superior: $\mu + 1\sigma = 170 + 5 = 175$ cm
  - El $68{,}26\%$central mide entre 165 cm**y** 175 cm.
- **Apartado b) Porcentaje que supera los 180 cm:**
  - **Paso 1: Calcular la distancia en desviaciones estándar (Z):**

$$Z = \frac{180 - 170}{5} = \frac{10}{5} = +2$$

El valor 180 cmestá exactamente a $+2\sigma$de la media.

  - **Paso 2: Aplicar la regla del 95%:** Entre $-2\sigma(160$ cm) y $+2\sigma(180$ cm) se encuentra el $95{,}44\%$de los estudiantes.
  - **Paso 3: Repartir las colas exteriores:**

💡 **Inciso pedagógico (Simetría de las colas):** Fuera del intervalo central queda un $100\% - 95{,}44\% = 4{,}56\%$.

Por la simetría de la campana, la mitad de ese porcentaje queda en la cola izquierda (< 160 cm) y la otra mitad en la cola derecha (> 180 cm):

$$\text{Porcentaje}(X > 180) = \frac{4{,}56\%}{2} = 2{,}28\%$$

- **Resultado final: a) Entre 165 cm$y$ 175 cm; b) El $2{,}28\%$de los estudiantes.**

Ejercicio Resuelto 38.2

En un proceso de selección de personal se realizaron dos pruebas distintas:

- Carlos obtuvo un 78en la prueba A ($\mu_A = 70, \sigma_A = 4$).
- Marta obtuvo un 84en la prueba B ($\mu_B = 75, \sigma_B = 6$).

¿Quién obtuvo un rendimiento relativo mejor respecto a su grupo?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Tipificar la puntuación de Carlos (Z_{Carlos}):**

$$Z_{\text{Carlos}} = \frac{X_A - \mu_A}{\sigma_A} = \frac{78 - 70}{4} = \frac{8}{4} = +2{,}0$$

- **Paso 2: Tipificar la puntuación de Marta (Z_{Marta}):**

$$Z_{\text{Marta}} = \frac{X_B - \mu_B}{\sigma_B} = \frac{84 - 75}{6} = \frac{9}{6} = +1{,}5$$

- **Paso 3: Comparar valores estandarizados:**

💡 **Inciso pedagógico (Interpretación de Z):** Aunque Marta sacó más puntos brutos ($84 > 78$), Carlos se situó a 2desviaciones típicas completas por encima de su media, mientras que Marta se situó a solo $1{,}5$desviaciones típicas. Carlos superó a una mayor proporción de competidores en su examen.

- **Resultado final: Carlos tuvo un mejor rendimiento relativo ($Z = +2{,}0 > Z = +1{,}5$).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 38.1:** El peso de los paquetes de harina sigue una distribución $N(1000\text{ g}, 10\text{ g})$. ¿Entre qué valores de peso se encuentra el $95{,}4\%$de los paquetes?

(Solución indicada: Entre 980 g*y* 1020 g*)*

2. **Propuesto 38.2:** El tiempo de duración de una bombilla sigue una distribución normal con $\mu = 1200$ horasy $\sigma = 100$ horas. Si una bombilla duró 1050 horas, calcula su valor tipificado Z.

(Solución indicada: $Z = -1{,}5$*)*

3. **Propuesto 38.3:** En una distribución normal con media $\mu = 50$, ¿qué porcentaje de observaciones es inferior a la media ($X < 50$)?

(Solución indicada: Exactamente el 50%*por simetría)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 38.1

- **Enunciado:** $\mu = 1000$ g, $\sigma = 10$ g. Intervalo de $\pm 2\sigma$.
- **Desarrollo:**
    1. *Límite inferior:* $\mu - 2\sigma = 1000 - 2(10) = 1000 - 20 = 980$ g.
    2. *Límite superior:* $\mu + 2\sigma = 1000 + 2(10) = 1000 + 20 = 1020$ g.

- **Resultado: Entre** 980 g**y** 1020 g

Solución del Propuesto 38.2

- **Enunciado:** $\mu = 1200, \sigma = 100, X = 1050$.
- **Desarrollo:**
    1. *Fórmula:* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.
    2. *Sustitución:* $Z = \frac{1050-1200}{100} = \frac{-150}{100} = -1{,}5$.
- **Resultado:** $Z = -1{,}5$

Solución del Propuesto 38.3

- **Enunciado:** Porcentaje menor a la media en una distribución normal.
- **Desarrollo:**
    1. La función de densidad de la distribución normal es perfectamente simétrica respecto a su eje central $x = \mu$.
    2. El área total bajo la curva representa el 100%de la probabilidad $(1{,}0)$.
    3. Por tanto, el área a la izquierda de la media es exactamente la mitad: $\frac{100\%}{2} = 50\%$.
- **Resultado:** 50%

📘 TEMA 39: EL MAPA COMPLETO DE LA REALIDAD NUMÉRICA: NÚMEROS COMPLEJOS Y EL MUNDO IMAGINARIO

39.1. El Callejón sin Salida: La Raíz de un Número Negativo

A lo largo de la historia, las matemáticas se ampliaron cada vez que una ecuación no tenía solución en el conjunto de números conocido:

- Si no podías restar $3 - 5$, nacieron los **Números Negativos ($\mathbb{Z}$)**.
- Si no podías dividir $7 \div 2$de forma exacta, nacieron las **Fracciones ($\mathbb{Q}$)**.
- Si la diagonal de un cuadrado no cabía en una fracción ($\sqrt{2}$), nacieron los **Irracionales ($\mathbb{I}$)**.

Pero al resolver ecuaciones cuadráticas simples como $x^2 + 1 = 0$, nos topamos con un muro:

$$x^2 = -1 \Longrightarrow x = \sqrt{-1}$$

Ningún número real al cuadrado puede dar negativo (porque $(+) \cdot (+) = +$y $(-) \cdot (-) = +$).

Para resolver este enigma, el matemático Leonhard Euler definió formalmente la **Unidad Imaginaria (i)**:

$$i = \sqrt{-1} \quad \Longrightarrow \quad i^2 = -1$$

39.2. Estructura de un Número Complejo ($\mathbb{C}$)

Un **Número Complejo (z)** es la unión de dos mundos: una parte real ordinaria y una parte imaginaria:

$$z = a + b \cdot i$$

- **Parte Real:** $\mathrm{Re}(z) = a$
- **Parte Imaginaria:** $\mathrm{Im}(z) = b$

🧭 **El Plano Complejo (Plano de Gauss):**

Así como los números reales viven en una recta horizontal de 1D, los números complejos viven en un plano de 2D:

- El **Eje Horizontal (Eje Real)** representa la parte a.
- El **Eje Vertical (Eje Imaginario)** representa la parte $b \cdot i$. ¡Cada número complejo $z = a + bi$es equivalente al punto o vector (a, b)!

39.3. Operaciones Básicas y el Conjugado

1. Suma y Resta (Reales con reales, imaginarios con imaginarios)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

2. Multiplicación (Propiedad distributiva y sustituir $i^2 = -1$)

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3. El Complejo Conjugado ($\bar{z}$)

Se obtiene cambiando únicamente el signo de la parte imaginaria:

$$\text{Si } z = a + bi \Longrightarrow \bar{z} = a - bi$$

- **Propiedad mágica:** Multiplicar un número por su conjugado siempre elimina la iy da un número real positivo:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 39.1

Resuelve la ecuación de segundo grado en el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$):

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Aplicar la fórmula general de segundo grado.**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  - Coeficientes: $a = 1, b = -4, c = 13$.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)}$$

- **Paso 2: Calcular el interior de la raíz (discriminante).**
  - $(-4)^2 = 16$
  - $4 \cdot 1 \cdot 13 = 52$
  - Discriminante: $16 - 52 = -36$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

- **Paso 3: Extraer la unidad imaginaria i.**

💡 **Inciso pedagógico (Descomponer raíces negativas):**

Reescribimos $\sqrt{-36}$como $\sqrt{36 \cdot (-1)} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i$.

$$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

- **Paso 4: Dividir cada término entre 2.**

$$x = \frac{4}{2} \pm \frac{6i}{2} = 2 \pm 3i$$

- **Resultado final: Las dos soluciones conjugadas son** $x_1 = 2 + 3i$ **y** $x_2 = 2 - 3i$**.**

Ejercicio Resuelto 39.2

Efectúa la división de números complejos simplificando el resultado:

$$\frac{3 + 2i}{1 - i}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Multiplicar numerador y denominador por el conjugado de abajo.**
  - El denominador es $1 - i$, por lo que su conjugado es $1 + i$.

$$\frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

- **Paso 2: Desarrollar el numerador (arriba).**

$$(3 + 2i)(1 + i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot i + 2i \cdot 1 + 2i^2$$

  - Como $i^2 = -1$, el término $2i^2$pasa a ser $2(-1) = -2$:

$$3 + 5i - 2 = (3 - 2) + 5i = 1 + 5i$$

- **Paso 3: Desarrollar el denominador (abajo).**

$$(1 - i)(1 + i) = 1^2 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

- **Paso 4: Separar en forma binómica (**$a + bi$**).**

$$\frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

- **Resultado final:** $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 39.1:** Calcula la siguiente multiplicación de números complejos:

$$(2 + 3i) \cdot (4 - i)$$

(Solución indicada: $11 + 10i$*)*

2. **Propuesto 39.2:** Calcula las cuatro primeras potencias de la unidad imaginaria para descubrir su ciclo repetitivo de 4pasos:
    - i^1, i^2, i^3, i^4

(Solución indicada: $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$)

3. **Propuesto 39.3:** Dado el número complejo $z = 3 - 4i$, calcula su módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$(su distancia al origen en el plano de Gauss).

(Solución indicada: $|z| = 5$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 39.1

- **Enunciado:** $(2 + 3i)(4 - i)$
- **Desarrollo:**
    1. *Propiedad distributiva:*

$$2(4) + 2(-i) + 3i(4) + 3i(-i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2$$

    2. *Sustitución de $i^2 = -1$:*

$$8 + 10i - 3(-1) = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

- **Resultado:** $11 + 10i$

Solución del Propuesto 39.2

- **Enunciado:** Potencias sucesivas de i.
- **Desarrollo:**
    1. $i^1 = i$
    2. $i^2 = -1$(por definición)
    3. $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
    4. $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
- **Resultado:** $i, -1, -i, 1$**(el ciclo se repite periódicamente cada 4 potencias)**

Solución del Propuesto 39.3

- **Enunciado:** Módulo de $z = 3 - 4i$.
- **Desarrollo:**
    1. *Identificación:* $a = 3, b = -4$.
    2. *Fórmula pitagórica del módulo:*

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

- **Resultado:** $|z| = 5$

📘 TEMA 40: LA JOYA DE LAS MATEMÁTICAS: FORMA POLAR, TEOREMA DE DE MOIVRE Y LA IDENTIDAD DE EULER

40.1. De las Coordenadas Cartesianas a la Brújula Polar

En el tema anterior aprendimos que un número complejo $z = a + bi$se dibuja en el plano de Gauss como un punto con coordenadas horizontales y verticales (a, b)(**Forma Binómica**).

Sin embargo, hay otra forma mucho más elegante y potente de indicar una posición en el mapa: mediante una **distancia** y un **ángulo de giro** (**Forma Polar o Trigonométrica**):

$$z = r_\alpha = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

- **Módulo (r o $|z|$):** Es la distancia en línea recta desde el origen $(0,0)$hasta el punto:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Argumento (α o θ):** Es el ángulo que forma el vector con el eje real positivo:

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \Longrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

40.2. La Multiplicación y Potenciación en Forma Polar: Giros y Dilataciones

En forma binómica, multiplicar complejos o calcular $(a + bi)^{10}$exige tediosos desarrollos algebraicos. En forma polar, ¡se convierte en un juego de niños!

1. Multiplicación de Complejos

Para multiplicar dos números en forma polar, **se multiplican sus módulos y se suman sus ángulos**:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

2. Fórmula de De Moivre (Potencias Gigantes)

Para elevar un número complejo a una potencia entera n, **se eleva el módulo a la potencia y se multiplica el ángulo por** n:

$$z^n = [r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha))$$

40.3. La Ecuación Más Bella del Mundo: La Identidad de Euler

El matemático Leonhard Euler descubrió que la función exponencial y las razones trigonométricas están conectadas a través de la unidad imaginaria $i$mediante la **Fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Si evaluamos esta fórmula en el ángulo $\theta = \pi$ radianes$(180°)$:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi) = -1 + i(0) = -1$$

Al pasar el -1sumando al otro lado, obtenemos la **Identidad de Euler**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

🌟 ¿Por qué es considerada la fórmula más hermosa de la historia?

Porque reúne en una sola igualdad limpia y perfecta las **cinco constantes fundamentales** de todas las matemáticas:

1. e**:** La base de los logaritmos naturales y el crecimiento orgánico continuo.
2. i**:** La unidad imaginaria $(\sqrt{-1})$.
3. π**:** La constante geométrica del círculo y la trigonometría.
4. 1**:** El elemento neutro de la multiplicación (origen de la aritmética).
5. 0**:** El elemento neutro de la suma (la nada y el equilibrio).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 40.1

Convierte el número complejo en forma binómica $z = 1 + \sqrt{3}i$**a su forma polar (**r_α**).**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar las componentes ay b.**
  - Parte real: $a = 1$
  - Parte imaginaria: $b = \sqrt{3}$*(Ambos son positivos, por lo que el punto se encuentra en el 1.er cuadrante)*.
- **Paso 2: Calcular el módulo (r).**

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

  - $1^2 = 1$
  - $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

$$r = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

- **Paso 3: Calcular el argumento (α).**

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

💡 **Inciso pedagógico (Ángulos notables):** La tangente cuyo valor da $\sqrt{3}$en el primer cuadrante corresponde al ángulo notable de $60°$($\frac{\pi}{3}$ radianes).

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60°$$

- **Paso 4: Escribir la expresión polar final.**

$$z = 2_{60°} \quad \text{o bien} \quad z = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$$

- **Resultado final:** $z = 2_{60°}$

Ejercicio Resuelto 40.2

Calcula la potencia $(1 + i)^8$utilizando la fórmula de De Moivre.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Pasar la base $w = 1 + i$a forma polar.**

- Módulo: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Argumento: $\tan \alpha = \frac{1}{1} = 1 \Longrightarrow \alpha = 45°$

$$w = (\sqrt{2})_{45°}$$

- **Paso 2: Aplicar la fórmula de De Moivre con exponente $n = 8$.**

$$w^8 = \left[(\sqrt{2})_{45°}\right]^8 = (\sqrt{2})^8_{8 \cdot 45°}$$

- **Paso 3: Calcular el nuevo módulo y el nuevo ángulo.**
  - Módulo: $(\sqrt{2})^8 = (2^{1/2})^8 = 2^{8/2} = 2^4 = 16$
  - Ángulo: $8 \cdot 45° = 360°$(una vuelta completa, equivalente a $0°$).
- **Paso 4: Volver a la forma binómica.**

$$16_{360°} = 16(\cos 360° + i \operatorname{sen} 360°)$$

  - $\cos 360° = 1$
  - $\operatorname{sen} 360° = 0$

$$16(1 + 0i) = 16$$

💡 **Inciso pedagógico (Ahorro de tiempo):** Calcular $(1 + i)^8$multiplicando a mano el paréntesis ocho veces requeriría decenas de pasos; con la forma polar se resuelve en segundos.

- **Resultado final:** $(1 + i)^8 = 16$

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 40.1:** Multiplica los siguientes números complejos dados en forma polar:

$$z_1 = 3_{40°}, \quad z_2 = 2_{50°}$$

(Solución indicada: $6_{90°} = 6i$*)*

2. **Propuesto 40.2:** Pasa el número complejo $z = -4$(situado sobre el eje real negativo) a forma polar.

(Solución indicada: $4_{180°}$ *o* $4e^{i\pi}$*)*

3. **Propuesto 40.3:** Utiliza la fórmula de De Moivre para calcular $(1_{30°})^6$y exprésalo en forma binómica.

(Solución indicada: $1_{180°} = -1$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 40.1

- **Enunciado:** $z_1 \cdot z_2 = 3_{40°} \cdot 2_{50°}$
- **Desarrollo:**
  1. *Multiplicar módulos:* $3 \cdot 2 = 6$.
  2. *Sumar argumentos:* $40° + 50° = 90°$.
  3. *Forma binómica:* $6(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 6(0 + 1i) = 6i$.
- **Resultado:** $6_{90°} = 6i$

Solución del Propuesto 40.2

- **Enunciado:** Convertir $z = -4 + 0i$a forma polar.
- **Desarrollo:**
  1. *Módulo:* $r = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$.
  2. *Argumento:* El punto $(-4,0)$está sobre la parte negativa del eje X, formando un ángulo de $180°$(π rad).
- **Resultado:** $4_{180°}$

Solución del Propuesto 40.3

- **Enunciado:** $(1_{30°})^6$
- **Desarrollo:**
  1. *Módulo:* $1^6 = 1$.
  2. *Ángulo:* $6 \cdot 30° = 180°$.
  3. *Forma polar:* $1_{180°}$.
  4. *Forma binómica:* $1(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 1(-1 + 0) = -1$.
- **Resultado:** -1

📘 TEMA 41: LA FÍSICA DEL CAMBIO CONTINUO: ECUACIONES DIFERENCIALES Y CRECIMIENTO EXPONENCIAL

41.1. ¿Qué es una Ecuación Diferencial? El Enigma de las Tasas

En el álgebra clásica buscábamos un **número desconocido** (como hallar $x$en $2x + 4 = 10$).

En una **Ecuación Diferencial (ED)**, la incógnita no es un número: es una **función desconocida** $y = f(t)$, y la ecuación relaciona a esa función con sus propias **derivadas** (sus ritmos de cambio en el tiempo):

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

🌊 ¿Dónde aparecen en la vida real?

Prácticamente todas las leyes de la física, la biología y la ingeniería se escriben con ecuaciones diferenciales:

- La propagación de un virus o una bacteria en un cultivo.
- El enfriamiento progresivo de una taza de café recién servida (Ley de Newton).
- La desintegración radiactiva del carbono-14 para datar fósiles.
- Las órbitas de los planetas y el movimiento de un muelle.

41.2. El Modelo Reina: Ley de Crecimiento y Decaimiento Exponencial

La ley más famosa del cambio continuo dice que **la velocidad a la que crece una población es directamente proporcional a la cantidad de individuos que ya existen**:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

- Si $k > 0$, la población explota hacia arriba (**Crecimiento Malthusiano**).
- Si $k < 0$, la cantidad disminuye progresivamente hacia cero (**Desintegración Radiactiva**).

41.3. El Método de Separación de Variables: Cómo Resolverlas

Para resolver una ecuación diferencial de primer orden separable:

1. **Separar las letras:** Colocamos todas las $y$con su diferencial dya la izquierda, y todas las $t$con su diferencial dta la derecha:

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dt$$

2. **Integrar ambos lados:**

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\;dt$$

$$\ln|y| = k \cdot t + C$$

3. **Despejar la función $y(t)$aplicando la exponencial (e^x):**

$$y(t) = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt} = C_0 \cdot e^{kt}$$

Donde C_0(o y_0) es el **valor inicial** en el instante $t = 0$.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 41.1

Un cultivo de bacterias comienza con una población inicial de 500**bacterias ($y_0 = 500$) y su tasa de crecimiento responde a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 0{,}2 \cdot y$(donde el tiempo $t$se mide en horas).**

- a) Escribe la fórmula general de la función de población $y(t)$.
- b) ¿Cuántas bacterias habrá en el laboratorio al cabo de 10 horas? *(Dato: $e^2 \approx 7{,}389$)*.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Obtener la función $y(t)$:**
  - **Paso 1: Separar variables e integrar:**

$$\frac{dy}{y} = 0{,}2\,dt \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 0\,,2\,dt$$

$$\ln(y) = 0{,}2t + C \Longrightarrow y(t) = C_0 \cdot e^{0{,}2t}$$

  - **Paso 2: Sustituir la condición inicial ($y(0) = 500$):**

$$C_0 = 500$$

  - La función de crecimiento es:

$$y(t) = 500 \cdot e^{0{,}2t}$$

- **Apartado b) Calcular la población a las** 10 horas**($t = 10$):**
  - Sustituimos $t = 10$en la fórmula:

$$y(10) = 500 \cdot e^{0,2 \cdot 10} = 500 \cdot e^2$$

- Multiplicamos por la aproximación de e^2:

$$y(10) \approx 500 \cdot 7{,}389 = 3694{,}5$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprender la aceleración exponencial):**

Al principio el cultivo crecía a un ritmo moderado, pero al acumularse más bacterias reproduciéndose a la vez, en solo 10 horas la colonia se ha multiplicado por más de siete.

- **Resultado final: a)** $y(t) = 500 \cdot e^{0,2t}$**; b) Aproximadamente** 3695 bacterias**.**

Ejercicio Resuelto 41.2

Resuelve la siguiente ecuación diferencial separable con condición inicial $y(0) = 3$**:**

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Separar las variables** y**y** x**.**
  - Pasamos la $y$dividiendo a la izquierda y el dxmultiplicando a la derecha:

$$\frac{1}{y}\, dy = 2x\, dx$$

- **Paso 2: Integrar a ambos lados de la igualdad.**

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, x\, dx$$

  - Integral de la izquierda: $\ln|y|$
  - Integral de la derecha: $2 \cdot \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

- **Paso 3: Despejar la variable** y**.**
  - Aplicamos la función exponencial $e^{(\dots)}$a ambos lados:

$$y(x) = e^{x^2+C} = e^C \cdot e^{x^2} = K \cdot e^{x^2}$$

- **Paso 4: Hallar la constante particular Kusando $y(0) = 3$.**
  - Sustituimos $x = 0$e $y = 3$:

$$3 = K \cdot e^{0^2} = K \cdot e^0 = K \cdot 1 \Longrightarrow K = 3$$

- **Resultado final:** $y(x) = 3e^{x^2}$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 41.1:** Resuelve la ecuación diferencial por variables separadas:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

(Solución indicada: $y(x) = x^3 + C$*)*

2. **Propuesto 41.2:** Una sustancia radiactiva se desintegra siguiendo la ley $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}05t}$(en años). Si partimos de una masa inicial $N_0 = 100$ gramos, ¿cuántos gramos quedarán tras 20 años? *(Dato:* $e^{-1} \approx 0{,}368$*)*.

(Solución indicada: $36{,}8$ gramos*)*

3. **Propuesto 41.3:** Halla la solución particular de $\frac{dy}{dx} = 4y$sabiendo que $y(0) = 7$.

(Solución indicada: $y(x) = 7e^{4x}$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 41.1

- **Enunciado:** $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
- **Desarrollo:**
  1. *Separar variables:* $dy = 3x^2\,dx$.
  2. *Integrar:* $\int d\,y = \int 3\,x^2\,dx \Longrightarrow y = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$.
- **Resultado:** $y = x^3 + C$

Solución del Propuesto 41.2

- **Enunciado:** $N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}05t}$con $t = 20$.
- **Desarrollo:**
  1. *Exponente:* $-0{,}05 \cdot 20 = -1$.

2. *Cálculo:* $N(20) = 100 \cdot e^{-1} \approx 100 \cdot 0{,}368 = 36{,}8$ g.

- **Resultado:** $36{,}8$ gramos

Solución del Propuesto 41.3

- **Enunciado:** $\frac{dy}{dx} = 4y$con $y(0) = 7$.
- **Desarrollo:**
  1. *Separar e integrar:* $\frac{dy}{y} = 4\,dx \Longrightarrow \ln(y) = 4x + C \Longrightarrow y(x) = K \cdot e^{4x}$.
  2. *Constante:* $y(0) = K \cdot e^{0} = K = 7$.
- **Resultado:** $y(x) = 7e^{4x}$

📘 TEMA 42: EL MUNDO EN LÍNEA RECTA: OPTIMIZACIÓN Y PROGRAMACIÓN LINEAL

42.1. ¿Qué es la Programación Lineal? Tomar la Mejor Decisión Posible

En una fábrica, una empresa de logística o un hospital, los recursos (dinero, tiempo, trabajadores, espacio de almacén) nunca son infinitos.

La **Programación Lineal (PL)** es la rama matemática que nos ayuda a encontrar el **punto óptimo** (maximizar beneficios o minimizar costes) cumpliendo un conjunto de limitaciones o **restricciones**.

- 🎯 **Función Objetivo (Z):** Es la fórmula que queremos hacer lo más grande o lo más pequeña posible (por ejemplo, el beneficio total $Z = 30x + 50y$).
- 🚧 **Restricciones:** Son inecuaciones lineales que marcan los límites del sistema (horas de máquina disponibles, presupuesto máximo, etc.).
- 🛡️ **Condiciones de No Negatividad:** En la vida real no podemos fabricar cantidades negativas de un producto, por lo que siempre se añade:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

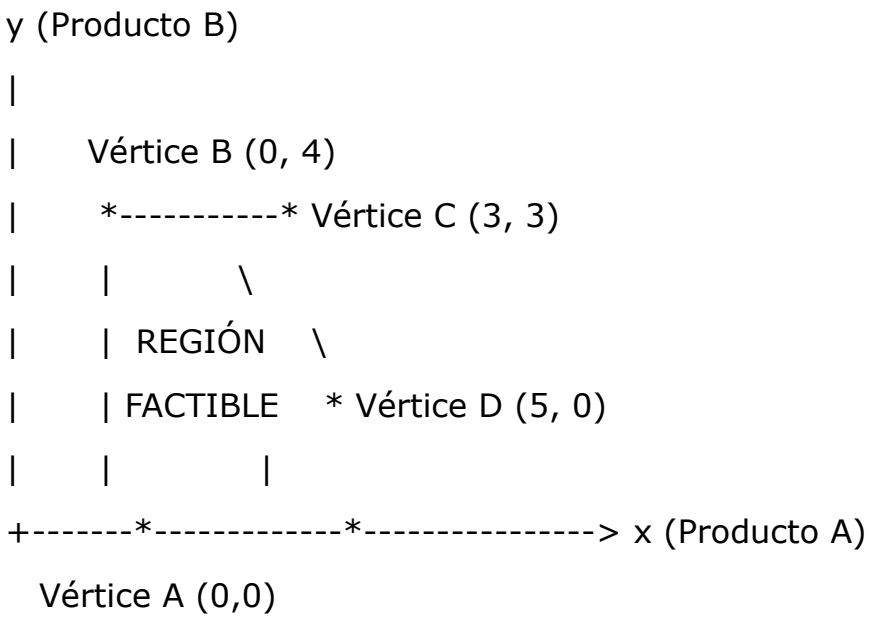
42.2. La Región Factible y el Teorema Fundamental

Al dibujar las inecuaciones de las restricciones en el plano cartesiano, las zonas sombreadas se cruzan formando un polígono plano cerrado llamado **Región Factible**.

- Cualquier punto dentro de ese polígono es una combinación válida de producción.
- Cualquier punto fuera del polígono es inviable (rompe alguna restricción).

👑 **Teorema Fundamental de la Programación Lineal:**

La solución óptima (el valor máximo o mínimo de la función objetivo) se encuentra **siempre en uno de los vértices (esquinas)** del polígono de la región factible, o en el segmento que une dos vértices.



42.3. Algoritmo Gráfico de Resolución en 4 Pasos

1. **Definir las incógnitas:** Asignar xe ya las cantidades a producir o decidir.
2. **Escribir la función objetivo y las restricciones:** Traducir el problema a inecuaciones algebraicas.
3. **Dibujar la región factible:** Hallar los puntos de corte de las rectas y sombrear la zona común para identificar las coordenadas de todos los **vértices**.

4. **Evaluar los vértices:** Sustituir las coordenadas de cada vértice en la función objetivo Zy elegir el valor más alto (para maximizar) o el más bajo (para minimizar).

📝 EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 42.1

Un artesano fabrica dos tipos de mesas de madera: Modelo Estándar (x) y Modelo Lujo (y).

- Cada mesa estándar deja un beneficio de 40 euroy cada mesa de lujo deja 60 euro.
- El taller dispone como máximo de 18 horas**de corte** y 12 horas**de barnizado** por semana.
- Fabricar una mesa estándar requiere 2 hde corte y 1 hde barnizado.
- Fabricar una mesa de lujo requiere 3 hde corte y 2 hde barnizado.

¿Cuántas mesas de cada tipo debe fabricar a la semana para maximizar su beneficio total?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Plantear la función objetivo y las restricciones.**
  - Maximizar beneficio:

$$Z(x,y) = 40x + 60y$$

  - Restricción de corte:

$$2x + 3y \leq 18$$

  - Restricción de barnizado:

$$1x + 2y \leq 12$$

  - No negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

- **Paso 2: Calcular los vértices de la región factible.**
  - **Vértice A(Origen):** $(0,0)$

- **Vértice B(Corte con eje Y):** Si $x = 0$, la restricción más restrictiva es $2y = 12 \Longrightarrow y = 6 \rightarrow (0{,}6)$*(comprobamos en corte:* $3(6) = 18 \leq 18$*, válido)*.
- **Vértice C(Corte de ambas rectas):** Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -2:

$$-2x - 4y = -24$$

Sumamos a la primera ecuación:

$$(2x - 2x) + (3y - 4y) = 18 - 24 \Longrightarrow -y = -6 \Longrightarrow y = 6$$

Sustituimos $y = 6$en la segunda ecuación:

$$x + 2(6) = 12 \Longrightarrow x + 12 = 12 \Longrightarrow x = 0$$

(El punto de intersección coincide con el vértice B*)*.

- **Vértice D(Corte con eje X):** Si $y = 0$, la restricción más exigente es $2x = 18 \Longrightarrow x = 9 \rightarrow (9{,}0)$*(comprobamos en barnizado:* $9 \leq 12$*, válido)*.

- **Paso 3: Evaluar la función objetivo en los vértices del polígono.**
  - En $A(0{,}0)$:

$$Z(0{,}0) = 40(0) + 60(0) = 0 \text{ euro}$$

  - En $B(0{,}6)$:

$$Z(0{,}6) = 40(0) + 60(6) = 360 \text{ euro}$$

  - En $D(9{,}0)$:

$$Z(9{,}0) = 40(9) + 60(0) = 360 \text{ euro}$$

💡 **Inciso pedagógico (Múltiples soluciones óptimas):**

Cuando dos vértices contiguos dan exactamente el mismo beneficio máximo (360 euro), **todos los puntos del segmento que los une** también son soluciones óptimas (por ejemplo, fabricar $x = 3$mesas estándar e $y = 4$mesas de lujo: $40(3) + 60(4) = 120 + 240 = 360$ euro).

- **Resultado final: El beneficio máximo es de** 360 euro**semanales (se puede lograr fabricando** 6**mesas de lujo y** 0**estándar, o** 9**estándar y** 0**de lujo, o combinaciones intermedias como** 3**estándar y** 4**de lujo).**

Ejercicio Resuelto 42.2

Minimiza la función de coste $C(x,y) = 5x + 8y$sujeta a las restricciones:

$$x + y \geq 6, \quad x \geq 2, \quad y \geq 1$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Localizar los vértices de la región factible.**
  - Las rectas de frontera son $x + y = 6$, $x = 2$e $y = 1$.
  - **Vértice 1:** Cruce de $x = 2$con $x + y = 6 \Longrightarrow 2 + y = 6 \Longrightarrow y = 4 \rightarrow \mathbf{V_1(2,4)}$.
  - **Vértice 2:** Cruce de $y = 1$con $x + y = 6 \Longrightarrow x + 1 = 6 \Longrightarrow x = 5 \rightarrow \mathbf{V_2(5,1)}$.
- **Paso 2: Evaluar la función de coste en los vértices.**
  - En $V_1(2,4)$:

    $$C(2,4) = 5(2) + 8(4) = 10 + 32 = 42$$
  - En $V_2(5,1)$:

    $$C(5,1) = 5(5) + 8(1) = 25 + 8 = 33$$
- **Paso 3: Seleccionar el valor mínimo.**
  - Comparamos: $33 < 42$.
- **Resultado final: El coste mínimo es 33, y se alcanza en el punto $(x = 5, y = 1)$.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 42.1:** Maximiza la función $Z = 3x + 2y$en una región factible cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(0,5)$, $C(4,3)$y $D(6,0)$.

(Solución indicada: Máximo en $C(4,3)$con $Z = 18$)

2. **Propuesto 42.2:** Una dieta debe contener al menos 10 unidadesde vitamina A y 12 unidadesde vitamina B. El alimento Xaporta 2de A y 2de B (cuesta 3 euro). El alimento Yaporta 1de A y 3de B (cuesta 2 euro). Plantea la función objetivo y las restricciones para minimizar el gasto.

(Solución indicada: Min $Z = 3x + 2y$; Restricciones: $2x + y \geq 10,\ 2x + 3y \geq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$)

3. **Propuesto 42.3:** Comprueba si el punto $(2,3)$pertenece a la región factible definida por $x + 2y \leq 8$y $3x + y \leq 10$.

(Solución indicada: Sí, cumple ambas restricciones: $2 + 6 = 8 \leq 8$*y* $6 + 3 = 9 \leq 10$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 42.1

- **Enunciado:** Maximizar $Z = 3x + 2y$en los vértices dados.
- **Desarrollo:**
  1. *Evaluar en cada vértice:*
     - $Z(0,0) = 3(0) + 2(0) = 0$
     - $Z(0,5) = 3(0) + 2(5) = 10$
     - $Z(4,3) = 3(4) + 2(3) = 12 + 6 = 18$
     - $Z(6,0) = 3(6) + 2(0) = 18$
  2. *Máximo:* Se alcanza un valor máximo de 18en los vértices $C(4,3)$y $D(6,0)$.
- **Resultado:** $Z_{\max} = 18$

Solución del Propuesto 42.2

- **Enunciado:** Formulación del problema de dieta.
- **Desarrollo:**
  1. *Coste:* $Z = 3x + 2y$(a minimizar).
  2. *Vitamina A:* $2x + 1y \geq 10$.
  3. *Vitamina B:* $2x + 3y \geq 12$.
  4. *No negatividad:* $x \geq 0, y \geq 0$.
- **Resultado: Min** $Z = 3x + 2y$**sujeto a** $2x + y \geq 10$**,** $2x + 3y \geq 12$**,** $x, y \geq 0$

Solución del Propuesto 42.3

- **Enunciado:** Validar si $(2,3)$es factible.
- **Desarrollo:**
  1. *Primera inecuación:* $x + 2y = 2 + 2(3) = 2 + 6 = 8 \leq 8$(Cumple).
  2. *Segunda inecuación:* $3x + y = 3(2) + 3 = 6 + 3 = 9 \leq 10$(Cumple).
  3. *No negatividad:* $2 \geq 0$y $3 \geq 0$(Cumple).

- **Resultado: Sí pertenece a la región factible.**

📘 TEMA 43: LA FLECHA DEL ESPACIO: VECTORES EN TRES DIMENSIONES, PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL

43.1. Navegando en 3D: Los Ejes X, Y, Z

En el plano cartesiano 2Dnos movíamos en dos direcciones: izquierda/derecha (X) y arriba/abajo (Y).

En el **espacio tridimensional (**3D**)** añadimos un tercer eje perpendicular que representa la **profundidad**: el **Eje** Z.

Un vector en el espacio se define mediante una terna de coordenadas cartesianas:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$$

- **Módulo o Longitud del Vector (**$|\vec{u}|$**):**

Se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras en tres dimensiones:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

43.2. Las Dos Formas de Multiplicar Vectores

A diferencia de los números ordinarios, en física y matemáticas existen dos maneras distintas de multiplicar dos vectores:

MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

/ \

PRODUCTO ESCALAR ($\vec{u} \cdot \vec{v}$) PRODUCTO VECTORIAL ($\vec{u} \times \vec{v}$)

/ \

Devuelve un NÚMERO (Escalar) Devuelve un NUEVO VECTOR perpendicular

Sirve para: Ángulos, Trabajo físico, Momentos de fuerza, Sirve para: Áreas 3D,

comprobar si son perpendiculares. hallar vectores perpendiculares a un plano.

43.3. Producto Escalar ($\vec{u} \cdot \vec{v}$): El Detector de Perpendicularidad

Se multiplican las componentes homólogas una a una y **se suman los resultados**:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

⚡ **Regla de Oro del Producto Escalar:**

Dos vectores no nulos son **perpendiculares u ortogonales (**$90°$**)** si y solo si su producto escalar es exactamente **cero**:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

43.4. Producto Vectorial ($\vec{u} \times \vec{v}$): El Creador de Vectores Perpendiculares

El producto vectorial genera un **nuevo vector** que es estrictamente perpendicular a ambos vectores a la vez (formando una regla de la mano derecha).

Se calcula resolviendo un determinante 3×3con los vectores unitarios canónicos $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

- **Aplicación geométrica del módulo:** El módulo del producto vectorial coincide exactamente con el **área del paralelogramo** encerrado por ambos vectores:

$$\text{Área del Paralelogramo} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 43.1

Dados los vectores en el espacio $\vec{u} = (2, -1, 3)$**y** $\vec{v} = (1, 4, 2)$**:**

- a) Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- b) Determina el ángulo αque forman entre sí.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular el producto escalar:**
  - Multiplicamos coordenada a coordenada:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(1) + (-1)(4) + (3)(2)$$

  - Operamos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 4 + 6 = 4$$

- **Apartado b) Calcular el ángulo α:**
  - **Paso 1: Calcular el módulo de $\vec{u}$:**

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

  - **Paso 2: Calcular el módulo de $\vec{v}$:**

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$$

  - **Paso 3: Despejar el coseno del ángulo:**

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{294}} \approx \frac{4}{17{,}146} \approx 0{,}2333$$

  - **Paso 4: Aplicar el arcocoseno (**$\arccos$**):**

$$\alpha = \arccos(0{,}2333) \approx 76{,}5°$$

- **Resultado final: a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$**; b)** $\alpha \approx 76{,}5°$

Ejercicio Resuelto 43.2

Calcula el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$para los vectores $\vec{u} = (1,2,0)$y $\vec{v} = (0,3,1)$y halla el área del paralelogramo que forman.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Plantear el determinante 3×3con adjuntos de la primera fila:**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- **Paso 2: Desarrollar por menores complementarios:**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

- **Paso 3: Calcular cada determinante 2×2:**
  - Componente $\vec{\imath}$: $(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = 2$
  - Componente $\vec{\jmath}$: $-(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -1$
  - Componente $\vec{k}$: $(1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = 3$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 3\vec{k} = (2, -1, 3)$$

- **Paso 4: Calcular el área del paralelogramo (Módulo del vector resultante):**

💡 **Inciso pedagógico (Sentido geométrico del producto vectorial):**

La longitud del vector $(2, -1, 3)$coincide numéricamente con el área de la figura geométrica 3D:

$$\text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \text{ unidades}^2$$

- **Resultado final:** $\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 3)$**; Área** $= \sqrt{14}$ u^2 $\approx 3{,}74$ u^2

🎯 **EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. **Propuesto 43.1:** Comprueba si los vectores $\vec{a} = (3, 2, -1)$y $\vec{b} = (2, -4, -2)$son perpendiculares mediante el producto escalar.

(Solución indicada: Sí, son perpendiculares porque $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 8 + 2 = 0$)

2. **Propuesto 43.2:** Calcula el módulo del vector de posición espacial $\vec{w} = (2,3,6)$.

(Solución indicada: $|\vec{w}| = 7$)

3. **Propuesto 43.3:** Dados los vectores $\vec{u} = (1,0,0)$y $\vec{v} = (0,1,0)$, calcula su producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

(Solución indicada: $(0,0,1) = \vec{k}$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 43.1

- **Enunciado:** $\vec{a} = (3,2,-1)$, $\vec{b} = (2,-4,-2)$.
- **Desarrollo:**
    1. *Producto escalar:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3)(2) + (2)(-4) + (-1)(-2) = 6 - 8 + 2 = 0$$

    2. *Condición:* Al ser el producto escalar igual a 0, los vectores forman un ángulo recto de $90°$.
- **Resultado: Sí son perpendiculares ($\vec{a} \perp \vec{b}$).**

Solución del Propuesto 43.2

- **Enunciado:** Módulo de $\vec{w} = (2,3,6)$.
- **Desarrollo:**
    1. *Fórmula:* $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$.
    2. *Cálculo:* $\sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$.
- **Resultado:** $|\vec{w}| = 7$

Solución del Propuesto 43.3

- **Enunciado:** $\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$.
- **Desarrollo:**
    1. *Determinante:*

- **Resultado:** $(0,0,1)$**(Vector unitario $\vec{k}$sobre el eje Z)**

📘 TEMA 44: EL ESPACIO AL DESCUBIERTO: RECTAS, PLANOS Y POSICIONES RELATIVAS EN 3D

44.1. La Recta en el Espacio: Un Punto y una Dirección

Para trazar una recta en el espacio tridimensional (3D), necesitamos dos ingredientes básicos:

1. Un punto de anclaje: $P(x_0, y_0, z_0)$
2. Un vector director que marque la dirección: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

A partir de ellos, podemos escribir la recta en tres formatos equivalentes:

- **Ecuación Vectorial:**

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- **Ecuaciones Paramétricas:**

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

- **Ecuación Continua:**

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

44.2. El Plano en el Espacio y su Vector Normal ($\vec{n}$)

Un plano π en el espacio es una superficie plana infinita. Su orientación queda fijada por un **vector normal ($\vec{n}$)**, que es un vector perpendicular al plano:

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

👑 Ecuación General o Implícita del Plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

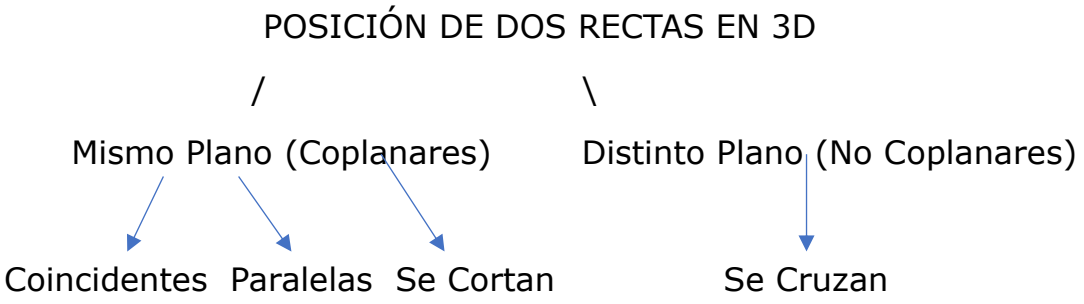
Los coeficientes A, B, C que acompañan a las incógnitas son directamente las componentes del vector perpendicular al plano.

Si conocemos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y el vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$, calculamos D mediante el producto escalar:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Longrightarrow D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

44.3. Posiciones Relativas en el Espacio: Las 4 Relaciones entre Dos Rectas

En el plano 2D, dos rectas solo podían cortarse, ser paralelas o coincidir. En el espacio 3D aparece una cuarta posibilidad:



🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 44.1

Halla la ecuación general del plano π que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (3,4,-2)$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Escribir la estructura del plano con el vector normal.**

Como $\vec{n} = (3,4,-2)$, los coeficientes A, B, C son $3,4,-2$:

$$3x + 4y - 2z + D = 0$$

- **Paso 2: Sustituir las coordenadas del punto $P(2,-1,3)$ para hallar el término independiente D.**

$$3(2) + 4(-1) - 2(3) + D = 0$$

- **Paso 3: Realizar las operaciones numéricas y despejar D.**

$$6 - 4 - 6 + D = 0$$

$$-4 + D = 0 \Longrightarrow D = 4$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprobación del punto):** Si metemos las coordenadas de P en la ecuación obtenida: $3(2) + 4(-1) - 2(3) + 4 = 6 - 4 - 6 + 4 = 0$, se cumple la igualdad.

- **Resultado final:** $3x + 4y - 2z + 4 = 0$

Ejercicio Resuelto 44.2

Dada la recta r en forma continua:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

- a) Extrae un punto P por el que pase y su vector director $\vec{v}$.
- b) Escribe sus ecuaciones paramétricas.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Identificar el punto y el vector:**
  - En el numerador $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$:
    - $x - 1 = 0 \Longrightarrow x_0 = 1$
    - $y + 3 = 0 \Longrightarrow y_0 = -3$
    - $z - 4 = 0 \Longrightarrow z_0 = 4$
    - Punto: $P(1, -3, 4)$
  - En los denominadores se leen directamente las componentes del vector:
    - Vector director: $\vec{v} = (2, -1, 5)$
- **Apartado b) Escribir las ecuaciones paramétricas:**
  - Combinamos punto y vector con el parámetro λ:
- **Resultado final: a)** $P(1, -3, 4)$ **y** $\vec{v} = (2, -1, 5)$**; b)** $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 4 + 5\lambda \end{cases}$

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 44.1:** Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y tiene vector director $\vec{u} = (3, -2, 1)$.

(Solución indicada: $x = 3\lambda,\ y = -2\lambda,\ z = \lambda$)

2. **Propuesto 44.2:** Halla un vector normal al plano $\pi: 5x - 2y + 7z - 11 = 0$.

(Solución indicada: $\vec{n} = (5, -2, 7)$)

3. **Propuesto 44.3:** Comprueba si el punto $Q(1,2,1)$ pertenece al plano $\pi: 2x + 3y - 4z - 4 = 0$.

(Solución indicada: Sí pertenece, pues $2(1)+3(2)-4(1)-4=2+6-4-4=0$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 44.1

- **Enunciado:** Recta por $O(0,0,0)$ con $\vec{u}=(3,-2,1)$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula paramétrica:* $x=x_0+\lambda u_1$, $y=y_0+\lambda u_2$, $z=z_0+\lambda u_3$.
  2. *Sustitución:* $x=0+3\lambda$, $y=0-2\lambda$, $z=0+\lambda$.
- **Resultado:** $\begin{cases} x=3\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Solución del Propuesto 44.2

- **Enunciado:** Vector normal de $\pi: 5x-2y+7z-11=0$.
- **Desarrollo:**
  1. Los coeficientes de x,y,z en la ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ corresponden a las componentes del vector perpendicular.
  2. $A=5$, $B=-2$, $C=7$.
- **Resultado:** $\vec{n}=(5,-2,7)$

Solución del Propuesto 44.3

- **Enunciado:** Pertenece $Q(1,2,1)$ a $\pi: 2x+3y-4z-4=0$.
- **Desarrollo:**
  1. *Sustituir* $x=1, y=2, z=1$*:*
     $$2(1)+3(2)-4(1)-4=2+6-4-4$$
  2. *Operar:* $8-8=0$.
  3. Al satisfacerse la ecuación, el punto está contenido en el plano.
- **Resultado: Sí pertenece al plano π.**

📘 TEMA 45: LA MEDIDA DEL ESPACIO: DISTANCIAS, ÁNGULOS Y PROYECCIONES EN 3D

45.1. La Métrica en el Espacio: ¿Cómo Medir Distancias en 3D?

En el tema anterior aprendimos a posicionar rectas y planos en el espacio. Ahora nos centraremos en **medir distancias mínimas y ángulos** entre estos elementos geométricos.

La distancia más corta entre dos objetos siempre se mide **a lo largo de la trayectoria perpendicular**.

45.2. Distancia de un Punto a un Plano

Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$y un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia perpendicular de Pal plano se calcula con la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- **Numerador:** Sustituimos las coordenadas del punto en la ecuación del plano y tomamos el valor absoluto (una distancia nunca puede ser negativa).
- **Denominador:** Es el módulo del vector normal del plano $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

45.3. Ángulos entre Rectas y Planos

1. Ángulo entre Dos Rectas (r_1 y r_2)

El ángulo αque forman dos rectas es el menor de los ángulos que determinan sus **vectores directores** $\vec{u}$y $\vec{v}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

2. Ángulo entre Dos Planos (π_1 y π_2)

Coincide con el ángulo que forman sus **vectores normales** $\vec{n}_1$y $\vec{n}_2$:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

3. Ángulo entre una Recta (r) y un Plano (π)

⚠️ **Atención al seno (sen):**

Como el vector normal del plano es perpendicular a este, el ángulo βentre la recta y el plano es el complementario del ángulo con el vector normal. Por ello, usamos el **seno**:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

🖍️ **EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)**

Ejercicio Resuelto 45.1

Calcula la distancia desde el punto $P(1,2,-3)$**al plano** $\pi: 2x - 2y + z - 6 = 0$**.**

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar los coeficientes del plano y las coordenadas del punto.**
  - Coeficientes del plano: $A = 2, B = -2, C = 1, D = -6$.
  - Coordenadas de P: $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = -3$.
- **Paso 2: Evaluar el numerador (sustituir el punto en el plano con valor absoluto).**

$$\text{Numerador} = |2(1) - 2(2) + 1(-3) - 6|$$

$$\text{Numerador} = |2 - 4 - 3 - 6| = |-11| = 11$$

- **Paso 3: Evaluar el denominador (módulo del vector normal** $\vec{n} = (2, -2, 1)$**).**

$$\text{Denominador} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

- **Paso 4: Calcular la distancia final.**

$$d(P, \pi) = \frac{11}{3} \approx 3{,}67 \text{ unidades}$$

- **Resultado final:** $d(P, \pi) = \frac{11}{3}$ u $\approx 3{,}67$ u

Ejercicio Resuelto 45.2

Halla el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi_1: x + y - 2 = 0, \quad \pi_2: y + z + 5 = 0$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Extraer los vectores normales de cada plano.**
  - Para π_1: $\vec{n}_1 = (1,1,0)$
  - Para π_2: $\vec{n}_2 = (0,1,1)$
- **Paso 2: Calcular el producto escalar $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$.**

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1)(0) + (1)(1) + (0)(1) = 0 + 1 + 0 = 1$$

- **Paso 3: Calcular los módulos de ambos vectores.**
  - $|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$
  - $|\vec{n}_2| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- **Paso 4: Aplicar la fórmula del coseno y despejar el ángulo α.**

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

💡

Inciso pedagógico (Ángulo notable):

El ángulo del primer cuadrante cuyo coseno vale exactamente $\frac{1}{2}$es $60°$($\frac{\pi}{3}$ radianes).

- **Resultado final: El ángulo entre ambos planos es de $60°$($\frac{\pi}{3}$ rad).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 45.1:** Calcula la distancia del origen de coordenadas $O(0,0,0)$al plano $\pi: 3x - 4z + 10 = 0$.

(Solución indicada: $d = 2$ unidades)

2. **Propuesto 45.2:** Comprueba si los planos $\pi_1: 2x - y + 3z - 1 = 0$y $\pi_2: x + 2y - 4 = 0$son perpendiculares ($90°$).

(Solución indicada: Sí, son perpendiculares porque $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2(1) + (-1)(2) + 3(0) = 0$)

3. **Propuesto 45.3:** Halla el ángulo que forma la recta con vector director $\vec{v} = (0,0,1)$y el plano con vector normal $\vec{n} = (0,0,1)$usando la fórmula del seno.

(Solución indicada: $\beta = 90°$, la recta es perpendicular al plano)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 45.1

- **Enunciado:** $P(0,0,0)$a $\pi: 3x + 0y - 4z + 10 = 0$.
- **Desarrollo:**
  1. *Numerador:* $|3(0) + 0(0) - 4(0) + 10| = |10| = 10$.
  2. *Denominador:* $\sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
  3. *Distancia:* $d = \frac{10}{5} = 2$.
- **Resultado:** $d = 2$ unidades

Solución del Propuesto 45.2

- **Enunciado:** $\vec{n}_1 = (2, -1,3)$y $\vec{n}_2 = (1,2,0)$.
- **Desarrollo:**
  1. *Producto escalar:*

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2(1) + (-1)(2) + 3(0) = 2 - 2 + 0 = 0$$

  2. Al ser el producto escalar nulo, los vectores normales forman un ángulo de $90°$, lo que implica que los planos son perpendiculares entre sí.
- **Resultado: Son perpendiculares ($\alpha = 90°$).**

Solución del Propuesto 45.3

- **Enunciado:** Recta con $\vec{v} = (0,0,1)$y plano con $\vec{n} = (0,0,1)$.
- **Desarrollo:**
  1. *Producto escalar:* $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0(0) + 0(0) + 1(1) = 1$.
  2. *Módulos:* $|\vec{v}| = 1, |\vec{n}| = 1$.
  3. *Fórmula del seno:* $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \Longrightarrow \beta = \backslash arcsen(1) = 90°$.
- **Resultado:** $\beta = 90°$

📘 TEMA 46: EL VOLUMEN ENCERRADO: EL PRODUCTO MIXTO Y LA DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN

46.1. ¿Qué es el Producto Mixto de Tres Vectores?

Cuando disponemos de tres vectores en el espacio 3D, $\vec{u}$, $\vec{v}$y $\vec{w}$, podemos combinarlos mediante dos operaciones vectoriales consecutivas: primero el **producto vectorial** y luego el **producto escalar**:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

A esta operación se le denomina **Producto Mixto**. El resultado final es un **único número real** (un escalar).

Cálculo Directo mediante Determinante 3×3

Para calcularlo rápidamente sin hacer dos pasos separados, colocamos las componentes de los tres vectores en las filas de un determinante:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

46.2. Aplicaciones Geométricas del Producto Mixto

1. Detección de Vectores Coplanares (En el Mismo Plano)

Tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$están en el mismo plano (no tienen volumen tridimensional) si y solo si su producto mixto es **cero**:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \text{Son Coplanares}$$

2. Volumen de un Paralelepípedo (Caja 3D Inclinada)

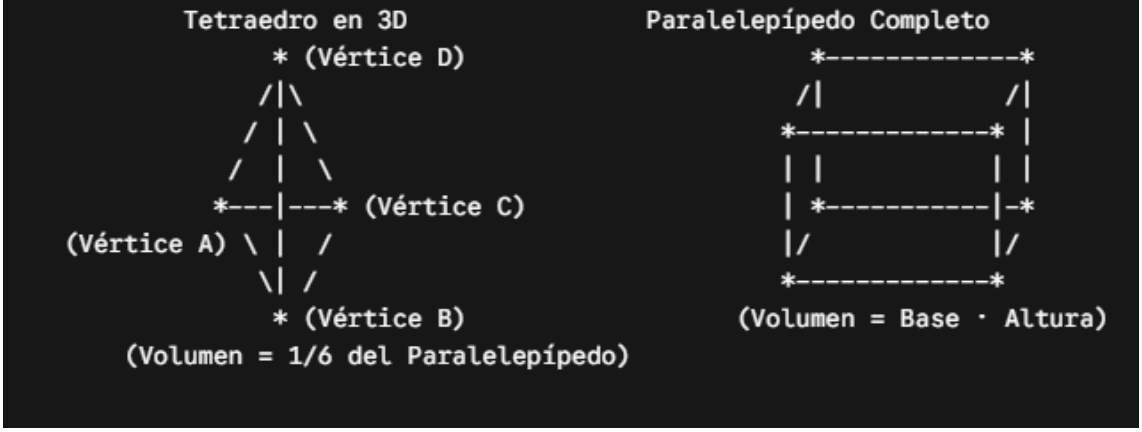
El valor absoluto del producto mixto representa exactamente el volumen del cuerpo geométrico tridimensional generado por los tres vectores:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

3. Volumen de un Tetraedro (Pirámide de Base Triangular)

Un tetraedro ocupa exactamente $\frac{1}{6}$del volumen de un paralelepípedo formado por los mismos tres vectores concurrentes:

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot |[u, v, w]|$$



46.3. Distancia Mínima entre Dos Rectas que se Cruzan en el Espacio

Dadas dos rectas r_1y $r_2$que se cruzan a distintas alturas en el espacio:

- Recta r_1: pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$con vector director $\vec{u}$.
- Recta r_2: pasa por el punto $B(x_2, y_2, z_2)$con vector director $\vec{v}$.
- Vector que une ambos puntos de anclaje: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

La distancia mínima perpendicular entre ambas rectas se calcula dividiendo el **volumen del paralelepípedo** que forman entre el **área de su base**:

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 46.1

Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices en el espacio son:

$$A(1,1,1), \quad B(3,1,2), \quad C(1,4,1), \quad D(2,2,5)$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Construir los tres vectores concurrentes desde el vértice A:**
  - $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-1,\ 1-1,\ 2-1) = (2,0,1)$
  - $\overrightarrow{AC} = C - A = (1-1,\ 4-1,\ 1-1) = (0,3,0)$
  - $\overrightarrow{AD} = D - A = (2-1,\ 2-1,\ 5-1) = (1,1,4)$
- **Paso 2: Plantear el producto mixto mediante el determinante 3×3:**

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

- **Paso 3: Resolver el determinante:**

💡 **Inciso pedagógico (Desarrollar por la fila con más ceros):**

Desarrollamos por la segunda fila, que tiene dos ceros:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = 3 \cdot (8-1) = 3 \cdot 7 = 21$$

- **Paso 4: Aplicar la fórmula del volumen del tetraedro ($\frac{1}{6}$ del paralelepípedo):**

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} \cdot |21| = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ unidades}^3$$

- **Resultado final: El volumen del tetraedro es de $\frac{7}{2}$ u^3 = 3,5 u^3.**

Ejercicio Resuelto 46.2

Calcula la distancia mínima entre las dos rectas que se cruzan en el espacio:

- Recta r_1: pasa por $A(0,0,0)$con vector $\vec{u} = (1,0,0)$.

- Recta r_2: pasa por $B(0,2,3)$con vector $\vec{v} = (0,1,0)$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Construir el vector $\overrightarrow{AB}$entre los dos puntos:**

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0-0,\ 2-0,\ 3-0) = (0,2,3)$$

- **Paso 2: Calcular el numerador (Producto Mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}]$):**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

  - Desarrollamos por la primera fila:

$$1 \cdot (1 \cdot 3 - 0 \cdot 2) = 3$$

  - El valor absoluto del numerador es $|3| = 3$.

- **Paso 3: Calcular el denominador ($|\vec{u} \times \vec{v}|$):**
  - Producto vectorial de los vectores directores:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

  - Módulo del vector resultante:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

- **Paso 4: Calcular la distancia final:**

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{1} = 3 \text{ unidades}$$

💡 **Inciso pedagógico (Comprobación visual intuitiva):**

La recta $r_1$es el eje X(altura $z = 0$) y la recta $r_2$es paralela al eje Ypero elevada a una altura fija $z = 3$. La distancia vertical más corta entre ambas es de 3unidades.

- **Resultado final:** $d(r_1, r_2) = 3$ unidades

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 46.1:** Comprueba si los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (2,4,6)$y $\vec{w} = (1,0,1)$son coplanares calculando su producto mixto.

(Solución indicada: Son coplanares porque $\vec{v} = 2\vec{u}$y su determinante da 0)

2. **Propuesto 46.2:** Calcula el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u} = (2,0,0)$, $\vec{v} = (0,3,0)$y $\vec{w} = (0,0,5)$.

(Solución indicada: $V = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ unidades^3)

3. **Propuesto 46.3:** Si el producto mixto de tres vectores que forman un paralelepípedo es $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -48$, ¿cuál es el volumen del tetraedro correspondiente?

(Solución indicada: $V = \frac{|-48|}{6} = 8$ unidades^3)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 46.1

- **Enunciado:** Coplanaridad de $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (2,4,6), \vec{w} = (1,0,1)$.
- **Desarrollo:**
    1. *Determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

    2. La segunda fila es múltiplo exacto de la primera ($F_2 = 2F_1$). Por propiedades de los determinantes, el resultado es inmediatamente 0.
    3. Al ser el producto mixto igual a 0, los tres vectores pertenecen al mismo plano.
- **Resultado: Sí son coplanares ($[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$).**

Solución del Propuesto 46.2

- **Enunciado:** Vectores sobre los ejes cartesianos: $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,5)$.
- **Desarrollo:**
    1. *Producto mixto (matriz diagonal):*

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

2. *Volumen:* $V = |30| = 30$ u^3.

- **Resultado:** 30 unidades^3

Solución del Propuesto 46.3

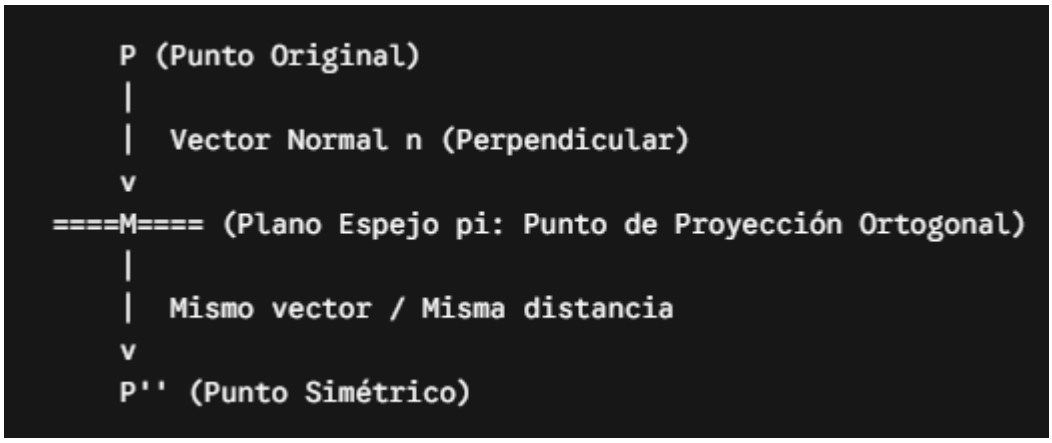
- **Enunciado:** $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -48$. Hallar volumen del tetraedro.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula:* $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$.
  2. *Cálculo:* $V = \frac{|-48|}{6} = \frac{48}{6} = 8$ u^3.
- **Resultado:** 8 unidades^3

📘 TEMA 47: EL ESPEJO DEL ESPACIO: PROYECCIONES ORTOGONALES Y PUNTOS SIMÉTRICOS EN 3D

47.1. ¿Qué es la Proyección Ortogonal? La Sombra Perpendicular

En geometría espacial, proyectar ortogonalmente un punto P sobre un plano π (o sobre una recta r) equivale a encontrar la **«sombra exacta»** que proyectaría el punto si lo iluminásemos con un haz de luz perfectamente perpendicular a la superficie.

- **Proyección Ortogonal (M o P'):** Es el punto exacto de corte entre la superficie y la recta perpendicular trazada desde P.
- **Punto Simétrico (P''):** Es el punto reflejado al otro lado del plano o de la recta a la misma distancia, como si la superficie fuera un espejo perfecto.



47.2. Algoritmo en 3 Pasos: Proyección y Simétrico Respecto a un Plano

Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$:

1. **Paso 1: Construir la recta perpendicular (r):**

Trazamos una recta auxiliar r que pase por P y utilice como vector director el vector normal del plano $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda A \\ y = y_0 + \lambda B \\ z = z_0 + \lambda C \end{cases}$$

2. **Paso 2: Hallar la proyección (M):**

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano π, despejamos el valor numérico del parámetro λ y sustituimos ese λ en la recta para obtener las coordenadas del punto de corte M.

3. **Paso 3: Hallar el simétrico (P''):**

Como M es el punto medio exacto entre el punto original P y su reflejo P'':

$$M = \frac{P + P''}{2} \Longrightarrow P'' = 2M - P$$

47.3. Proyección Ortogonal de un Punto sobre una Recta

Si queremos proyectar P sobre una recta r que tiene punto A y vector director $\vec{v}$:

1. Construimos un **plano auxiliar perpendicular** a la recta que pase por el punto P (usando $\vec{v}$ como vector normal del plano).
2. Intersecamos la recta r con ese plano auxiliar para encontrar el punto de corte M.

3. Aplicamos la fórmula del punto medio para obtener el simétrico: $P'' = 2M - P$.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 47.1

Halla la proyección ortogonal M y el punto simétrico P'' del punto $P(1,0,3)$ respecto al plano $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Construir la recta perpendicular r que pasa por P:**
  - El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, -1, 1)$.
  - Las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular son:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda = -\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- **Paso 2: Intersecar la recta r con el plano π para hallar la proyección M:**
  - Sustituimos las expresiones de x, y, z en la ecuación del plano:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + (3 + \lambda) - 1 = 0$$

  - Desarrollamos los paréntesis:

$$2 + 4\lambda + \lambda + 3 + \lambda - 1 = 0$$

  - Agrupamos los términos con λ y los números independientes:

$$(4\lambda + \lambda + \lambda) + (2 + 3 - 1) = 0$$

$$6\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow 6\lambda = -4 \Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

- **Paso 3: Calcular las coordenadas del punto M sustituyendo $\lambda = -\frac{2}{3}$ en la recta:**
  - $x_M = 1 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$
  - $y_M = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

- $z_M = 3 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$
- **Proyección Ortogonal:** $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

- **Paso 4: Calcular el punto simétrico $P'' = 2M - P$:**

💡 **Inciso pedagógico (Coordenada a coordenada):**

Multiplicamos cada coordenada de M por 2 y le restamos la coordenada correspondiente de P:

- $x_{P''} = 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{5}{3}$
- $y_{P''} = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}$
- $z_{P''} = 2\left(\frac{7}{3}\right) - 3 = \frac{14}{3} - \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$

- **Resultado final: Proyección: $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$; Simétrico: $P''\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$**

Ejercicio Resuelto 47.2

Calcula la proyección ortogonal del punto $P(2,3,1)$ sobre la recta $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el vector director de la recta:**
  - Vector director: $\vec{v} = (1,1,1)$.
- **Paso 2: Construir el plano perpendicular π_{aux} que pasa por $P(2,3,1)$:**
  - Usamos $\vec{v} = (1,1,1)$ como vector normal del plano:

$$1(x-2) + 1(y-3) + 1(z-1) = 0$$

$$x + y + z - 6 = 0$$

- **Paso 3: Intersecar la recta con el plano sustituyendo las paramétricas:**
  - Como $x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda$:

$$\lambda + \lambda + \lambda - 6 = 0 \Longrightarrow 3\lambda = 6 \Longrightarrow \lambda = 2$$

- **Paso 4: Obtener las coordenadas del punto de proyección M:**

- Sustituimos $\lambda = 2$ en la recta:

$$x = 2, \quad y = 2, \quad z = 2 \Longrightarrow M(2,2,2)$$

- **Resultado final: La proyección ortogonal es el punto $M(2,2,2)$.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 47.1:** Halla el punto simétrico de $A(2,-3,5)$ respecto al plano coordenado XY (cuya ecuación es $z = 0$).

(Solución indicada: $A''(2,-3,-5)$)

2. **Propuesto 47.2:** Dado el punto $P(0,0,0)$ y el plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$, halla su proyección ortogonal M.

(Solución indicada: $M(1,1,1)$)

3. **Propuesto 47.3:** Si la proyección ortogonal de un punto P sobre un plano es $M(2,1,4)$ y el punto original es $P(0,1,2)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto simétrico P''?

(Solución indicada: $P''(4,1,6)$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 47.1

- **Enunciado:** Simétrico de $A(2,-3,5)$ respecto a $z = 0$.
- **Desarrollo:**
  1. El plano XY actúa como un espejo horizontal. Las coordenadas x e y permanecen inalteradas.
  2. La coordenada z invierte su signo manteniendo la misma distancia: $z = -5$.
- **Resultado:** $A''(2,-3,-5)$

Solución del Propuesto 47.2

- **Enunciado:** Proyección de $P(0,0,0)$ sobre $\pi: x + y + z - 3 = 0$.
- **Desarrollo:**
  1. *Recta perpendicular:* $x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda$.
  2. *Intersección con el plano:* $\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Longrightarrow 3\lambda = 3 \Longrightarrow \lambda = 1$.
  3. *Coordenadas de M:* $(1,1,1)$.
- **Resultado:** $M(1,1,1)$

Solución del Propuesto 47.3

- **Enunciado:** $P(0,1,2)$ y $M(2,1,4)$. Hallar P''.
- **Desarrollo:**
    1. *Fórmula:* $P'' = 2M - P$.
    2. *Cálculo por componentes:*
        - $x = 2(2) - 0 = 4$
        - $y = 2(1) - 1 = 1$
        - $z = 2(4) - 2 = 6$
- **Resultado:** $P''(4,1,6)$

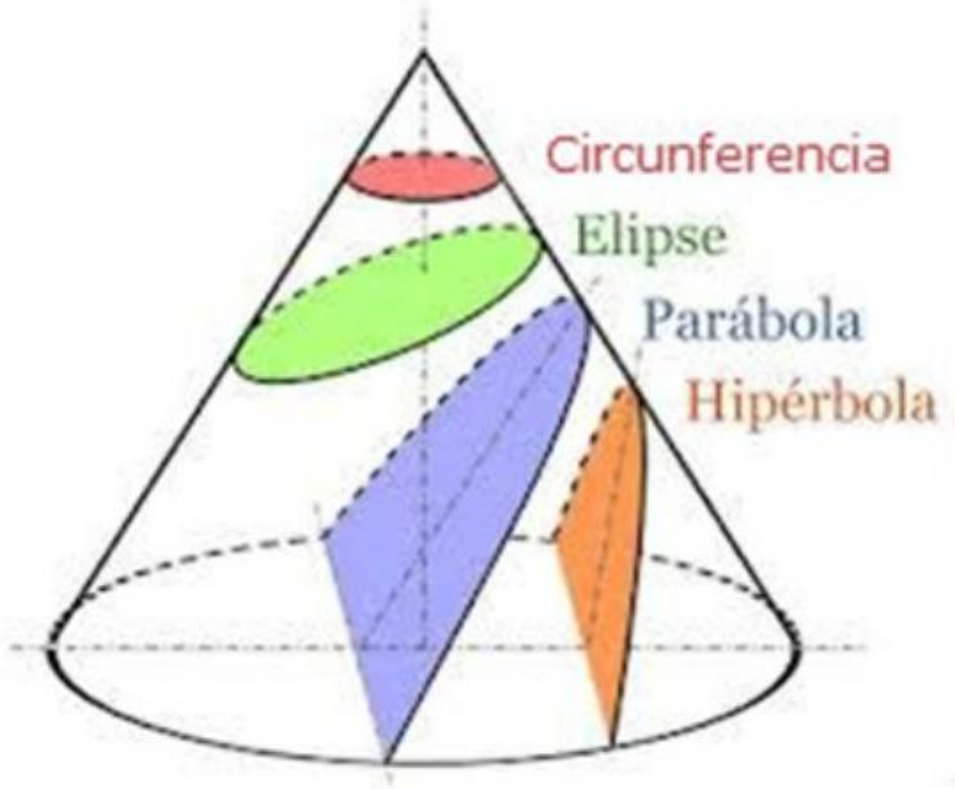
📘 TEMA 48: LAS CURVAS DEL COSMOS: SECCIONES CÓNICAS Y LUGARES GEOMÉTRICOS

48.1. Cortando un Cono: ¿De Dónde Nacen las Cónicas?

Las **Secciones Cónicas** son las curvas que se obtienen al cortar un cono doble recto con un plano en diferentes ángulos de inclinación. Fueron estudiadas por Apolonio de Pérgamo y siglos después resultaron ser las trayectorias exactas que siguen los planetas, cometas y satélites en el espacio (Leyes de Kepler).

48.2. Las Cuatro Cónicas Fundamentales y sus Ecuaciones Reducidas

Cada cónica se define formalmente como un **lugar geométrico** (un conjunto de puntos (x, y) que cumplen una propiedad métrica fija):



Cónica	**Definición como Lugar Geométrico**	**Ecuación Reducida (Centro (0,0))**	**Elementos Clave**
Circunferencia	Puntos que equidistan de un centro fijo $C(0,0)$ a distancia R.	$x^2 + y^2 = R^2$	Radio R, Centro $(0,0)$.
Elipse	Puntos cuya **suma de distancias** a dos focos es constante: $d_1 + d_2 = 2a$.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Semiejes a, b; Focos en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Hipérbola	Puntos cuya **diferencia de distancias** a	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Asíntotas $y = \pm\frac{b}{a}x$;

Cónica	Definición como Lugar Geométrico	Ecuación Reducida (Centro (0,0))	Elementos Clave
	dos focos es constante: $\|d_1 - d_2\| = 2a$.		Focos en $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Parábola	Puntos que equidistan de un foco F y una recta directriz d.	$y^2 = 2px$ o $x^2 = 2py$	Parámetro p, Vértice $(0,0)$, Foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

48.3. La Excentricidad (e): La Medida del Estiramiento

La **excentricidad** mide cuánto se desvía una cónica de ser un círculo perfecto ($e = \frac{c}{a}$):

- $e = 0 \longrightarrow$ **Circunferencia** (cero deformación).
- $0 < e < 1 \longrightarrow$ **Elipse** (órbita cerrada ovalada, como la Tierra alrededor del Sol).
- $e = 1 \longrightarrow$ **Parábola** (curva abierta de escape).
- $e > 1 \longrightarrow$ **Hipérbola** (curva abierta de trayectoria hiperbólica).

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 48.1

Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$:

- a) Halla la longitud del semieje mayor (a), el semieje menor (b) y la distancia focal (c).
- b) Determina las coordenadas de sus dos focos y calcula su excentricidad (e).

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Apartado a) Calcular semiejes y distancia focal:**
  - **Semieje mayor (a):** Como el denominador bajo x^2 es mayor ($25 > 9$), el eje principal es horizontal:

$$a^2 = 25 \Longrightarrow a = \sqrt{25} = 5$$

  - **Semieje menor (b):**

$$b^2 = 9 \Longrightarrow b = \sqrt{9} = 3$$

  - **Distancia focal (c):** Aplicamos la relación fundamental de la elipse ($a^2 = b^2 + c^2$):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- **Apartado b) Focos y excentricidad:**
  - Al estar orientada sobre el eje horizontal X, los focos se sitúan simétricos respecto al origen a distancia $c = 4$:

$$F_1(-4{,}0) \quad \text{y} \quad F_2(4{,}0)$$

  - Calculamos la excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

- 💡 **Inciso pedagógico (Comprobación de la excentricidad):**
- Como $0 < 0{,}8 < 1$, el valor confirma que se trata de una elipse achatada.
- **Resultado final: a)** $a = 5, b = 3, c = 4$**; b) Focos en** $(\pm 4{,}0)$ **y** $e = 0{,}8$**.**

Ejercicio Resuelto 48.2

Halla el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación general es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Agrupar términos en x y en y para completar cuadrados:**

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 0$$

- **Paso 2: Completar cuadrados en ambos binomios:**
  - Para $x^2 - 6x$: la mitad de 6 es 3, su cuadrado es $3^2 = 9 \rightarrow (x - 3)^2 - 9$.

- Para $y^2 + 8y$: la mitad de 8 es 4, su cuadrado es $4^2 = 16 \rightarrow (y+4)^2 - 16$.

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 = 0$$

- **Paso 3: Pasar los números independientes al segundo miembro:**

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9 + 16$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

- **Paso 4: Identificar centro (x_0, y_0) y radio R desde $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$:**
  - Centro: $C(3,-4)$
  - Radio: $R = \sqrt{25} = 5$
- **Resultado final: Centro $C(3,-4)$ y radio $R = 5$ unidades.**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 48.1:** Calcula la distancia focal $(2c)$ de la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

(Solución indicada: $c = \sqrt{16+9} = 5 \Longrightarrow$ Distancia focal $2c = 10$)

2. **Propuesto 48.2:** Escribe la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $C(2,-1)$ con radio $R = 4$.

(Solución indicada: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$)

3. **Propuesto 48.3:** Dada la parábola $y^2 = 8x$, halla las coordenadas de su foco y la ecuación de su recta directriz.

(Solución indicada: Foco $F(2,0)$, Directriz $x = -2$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 48.1

- **Enunciado:** Distancia focal de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
- **Desarrollo:**
  1. En la hipérbola rige la relación $c^2 = a^2 + b^2$.
  2. $a^2 = 16, b^2 = 9 \Longrightarrow c = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.
  3. La distancia total entre ambos focos es $2c = 2(5) = 10$.
- **Resultado:** $2c = 10$ unidades

Solución del Propuesto 48.2

- **Enunciado:** $C(2,-1), R=4$.
- **Desarrollo:**
  1. *Fórmula canónica:* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
  2. *Sustitución:* $(x-2)^2+\big(y-(-1)\big)^2=4^2 \Longrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=16$.
- **Resultado:** $(x-2)^2+(y+1)^2=16$

Solución del Propuesto 48.3

- **Enunciado:** Parábola $y^2=8x$.
- **Desarrollo:**
  1. *Forma canónica:* $y^2=2px \Longrightarrow 2p=8 \Longrightarrow p=4$.
  2. *Foco:* $\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{4}{2},0\right)=(2,0)$.
  3. *Directriz:* $x=-\frac{p}{2} \Longrightarrow x=-2$.
- **Resultado: Foco** $F(2,0)$ **y Directriz** $x=-2$

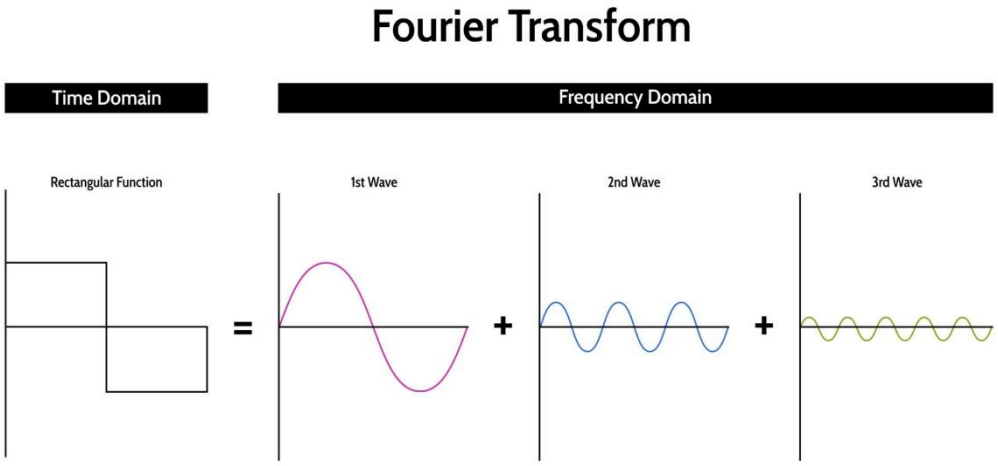
📘 TEMA 49: LA MÚSICA DE LAS MATEMÁTICAS: SERIES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

49.1. La Gran Idea de Joseph Fourier: Descomponer la Complejidad

En 1822, el matemático francés **Joseph Fourier** propuso una afirmación que revolucionó la ciencia:

Cualquier señal u onda periódica compleja (la voz humana, el sonido de un violín, la señal de Wi-Fi o una onda térmica), por muy irregular que parezca, se puede descomponer como una suma infinita de ondas simples: ***senos y cosenos****.*

Es el equivalente matemático a pasar un rayo de luz blanca a través de un **prisma** para separarlo en todos los colores del arcoíris, o a un chef que puede probar una salsa e identificar cada especia y cantidad exacta que lleva.



Descomposición de Fourier en armónicos. Fuente: petrroudny / Getty Images

49.2. La Serie Trigonométrica de Fourier

Dada una función periódica $f(x)$con periodo $T = 2L$, su desarrollo en **Serie de Fourier** se escribe como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

- **Término constante ($\frac{a_0}{2}$):** Representa el **valor medio** o nivel continuo de la señal.
- **Armónico Fundamental ($n = 1$):** La onda pura que oscila a la frecuencia base principal.
- **Armónicos Superiores ($n = 2,3,4 \ldots$):** Ondas de frecuencias múltiplos que aportan el **timbre** y los detalles finos de la señal.

Fórmulas de Euler-Fourier para los Coeficientes (en el intervalo $[-L, L]$):

- $a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\,(x)\,dx$
- $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\,(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$
- $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\,(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx$

49.3. Simetría Par e Impar: El Atajo de los Coeficientes

Aprovechar la simetría de una función ahorra la mitad de los cálculos de integración:

- **Función Par ($f(-x) = f(x)$):** Es simétrica respecto al eje vertical Y(como el coseno).

$\Longrightarrow \mathbf{b_n = 0}$*(solo contiene términos coseno y* a_0*)*.

- **Función Impar ($f(-x) = -f(x)$):** Es simétrica respecto al origen $(0,0)$(como el seno).

$\Longrightarrow \mathbf{a_0 = 0}$ y $\mathbf{a_n = 0}$*(solo contiene términos seno)*.

49.4. Dominio del Tiempo vs. Dominio de la Frecuencia (Transformada de Fourier)

- **Dominio del Tiempo / Espacio:** Muestra cómo cambia el voltaje, la presión sonora o la imagen a lo largo del tiempo: $f(t)$.
- **Dominio de la Frecuencia (Transformada $\hat{f}(\omega)$):** Muestra **qué frecuencias exactas** están presentes en la señal y con qué intensidad.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

🎛️ **Aplicaciones en el Mundo Real:**

- Compresión de audio en archivos **MP3** y de imágenes en **JPEG** (eliminando frecuencias inaudibles o invisibles).
- Cancelación activa de ruido en auriculares.
- Resonancia magnética médica (MRI) y telecomunicaciones 4G/5G.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 49.1

Calcula los primeros tres armónicos no nulos de la serie de Fourier para la onda cuadrada impar definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ +1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Analizar la simetría de la función.**
  - Dado que $f(-x) = -f(x)$, la función es **estrictamente impar**.

- Por las propiedades de simetría:

$$a_0 = 0 \quad \text{y} \quad a_n = 0 \quad \text{para todo } n$$

- Solo debemos calcular los coeficientes de los senos (b_n) con $L = \pi$.

- **Paso 2: Calcular el coeficiente $b_n$aprovechando la simetría:**

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (1)\cdot \text{sen}(nx)\,dx$$

- **Paso 3: Resolver la integral definida:**

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}[\cos(n\pi) - \cos(0)]$$

- Recordando que $\cos(0) = 1$y $\cos(n\pi) = (-1)^n$:

$$b_n = \frac{2}{\pi n}[1 - (-1)^n]$$

- **Paso 4: Evaluar para valores pares e impares de n:**

- Si $n$es **par** ($n = 2,4,6\ldots$):

$$(-1)^n = 1 \Longrightarrow 1 - 1 = 0 \Longrightarrow b_n = 0$$

- Si $n$es **impar** ($n = 1,3,5\ldots$):

$$(-1)^n = -1 \Longrightarrow 1 - (-1) = 2 \Longrightarrow b_n = \frac{2}{\pi n}(2) = \frac{4}{n\pi}$$

- **Paso 5: Escribir los tres primeros términos de la serie:**

- Para $n = 1$: $b_1 = \frac{4}{\pi}$
- Para $n = 3$: $b_3 = \frac{4}{3\pi}$
- Para $n = 5$: $b_5 = \frac{4}{5\pi}$

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}\text{sen}(x) + \frac{4}{3\pi}\text{sen}(3x) + \frac{4}{5\pi}\text{sen}(5x)$$

💡 **Inciso pedagógico (Aproximación sucesiva):**

Sumando solo estas tres ondas sinusoidales ya se obtiene una gráfica muy parecida a la onda cuadrada escalonada; al tender na infinito, la suma converge con exactitud al perfil rectangular.

- **Resultado final:** $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\left((2k-1)x\right)}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \cdots\right)$

Ejercicio Resuelto 49.2

Calcula el término medio constante $a_0$de la serie de Fourier para la función par $f(x) = |x|$en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Aplicar la fórmula para $a_0$con $L = \pi$:**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx$$

- **Paso 2: Explotar la paridad de la función:**
  - Como $|x|$es una función par, la integral de $-\pi$a πes el doble de la integral de 0a π:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\ dx$$

- **Paso 3: Integrar y evaluar en los límites:**

$$\int_0^{\pi} x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{2}$$

- **Paso 4: Multiplicar por el factor $\frac{2}{\pi}$:**

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

- **Paso 5: Determinar el valor medio $\frac{a_0}{2}$:**

$$\text{Valor medio} = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

- **Resultado final: $a_0 = \pi$(el término constante inicial de la serie es $\frac{\pi}{2}$).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 49.1:** Si desarrollamos en serie de Fourier la función puramente par $f(x) = x^2$en $[-\pi, \pi]$, ¿cuánto valen todos sus coeficientes b_n?

(Solución indicada: $b_n = 0$para todo n, debido a que las funciones pares no tienen armónicos impares de seno)

2. **Propuesto 49.2:** ¿Cuál es la frecuencia del tercer armónico de una nota musical cuya frecuencia fundamental es de 440 Hz(nota La)?

(Solución indicada: $f_3 = 3 \cdot 440 = 1320$ Hz*)*

3. **Propuesto 49.3:** En la serie de la onda cuadrada $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}(x) + \frac{1}{3}\text{sen}(3x) + \frac{1}{5}\text{sen}(5x) + \cdots\right)$, evalúa el valor que predice la serie en el punto $x = \frac{\pi}{2}$recordando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$.

(Solución indicada: Da la famosa serie de Leibniz para π*:* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$*)*

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 49.1

- **Enunciado:** Coeficientes $b_n$de $f(x) = x^2$en $[-\pi, \pi]$.
- **Desarrollo:**
    1. La función $f(x) = x^2$satisface $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, por lo que es una función par.
    2. Al multiplicar una función par por $\text{sen}(nx)$(que es impar), el integrando resulta ser una función impar.
    3. La integral de cualquier función impar en un intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$es idénticamente cero.
- **Resultado:** $b_n = 0$**para todo** $n \in \mathbb{N}$

Solución del Propuesto 49.2

- **Enunciado:** Frecuencia del 3.er armónico con $f_1 = 440$ Hz.
- **Desarrollo:**
    1. Los armónicos de Fourier son múltiplos enteros exactos de la frecuencia fundamental: $f_n = n \cdot f_1$.
    2. Para $n = 3$: $f_3 = 3 \cdot 440$ Hz $= 1320$ Hz.
- **Resultado:** 1320 Hz

Solución del Propuesto 49.3

- **Enunciado:** Evaluar la serie de la onda cuadrada en $x = \frac{\pi}{2}$.
- **Desarrollo:**

1. *Sustitución:*

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \cdots\right]$$

2. *Valores trigonométricos:* $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

3. Como la función original vale $+1$en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

- **Resultado: Demuestra la fórmula de Leibniz:** $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

📘 TEMA 50: EL INFINITO MATEMÁTICO: CARDINALES DE CANTOR, HIPÓTESIS DEL CONTINUO Y EL HOTEL DE HILBERT

50.1. El Reto de Pensar en el Infinito (∞)

Durante siglos, los matemáticos consideraban el infinito como un concepto inalcanzable al que las cantidades solo podían aproximarse (un límite potencial).

A finales del siglo XIX, **Georg Cantor** demostró que **el infinito existe como una cantidad matemática medible** y descubrió algo asombroso: **no todos los infinitos son del mismo tamaño**. Hay infinitos estrictamente más grandes que otros.

50.2. La Paradoja del Gran Hotel de Hilbert

Para explicar cómo se comporta el infinito, el matemático David Hilbert propuso un experimento mental:

🏨 **El Hotel:**

Imagina un hotel con **infinitas habitaciones numeradas** $(1,2,3,4,\ldots)$, y supón que **todas están ocupadas**.

1. **Llega un nuevo huésped:** ¿Podemos alojarlo?

- *Solución:* Movemos al huésped de la habitación n a la habitación $n+1$. La habitación 1 queda libre para el recién llegado.

2. **Llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes:**
   - *Solución:* Movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$ (ocupando todas las habitaciones pares: $2,4,6,8\ldots$). ¡Todas las infinitas habitaciones impares ($1,3,5,7\ldots$) quedan libres para los nuevos viajeros!

En el infinito, añadir elementos no cambia el tamaño total del conjunto: $\infty + 1 = \infty$ y $2 \cdot \infty = \infty$.

50.3. Los Tamaños del Infinito: Cardinales y Álef Cero ($\aleph_0$)

Para saber si dos conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño, intentamos emparejar sus elementos uno a uno (**Biyectividad**):

Conjunto de Naturales (N): 1 <---> 2 <---> 3 <---> 4 <---> ...

| | | |

Conjunto de Pares (2N): 2 <---> 4 <---> 6 <---> 8 <---> ...

Como se pueden emparejar sin que sobre ninguno, ¡hay exactamente la misma cantidad de números naturales que de números pares!

- 🔢 **Infinito Numerable ($\aleph_0$ o Álef Cero):** Es el infinito más pequeño que existe. Es el tamaño del conjunto de los **Números Naturales ($\mathbb{N}$)**, de los **Enteros ($\mathbb{Z}$)** y de los **Números Racionales ($\mathbb{Q}$)**.
- 🌊 **Infinito No Numerable (El Continuo, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$):** Es el tamaño del conjunto de los **Números Reales ($\mathbb{R}$)** en cualquier intervalo de la recta continua (por ejemplo, todos los decimales entre 0 y 1).

50.4. El Argumento Diagonal de Cantor: La Demostración de que $\mathbb{R} > \mathbb{N}$

Cantor demostró que es imposible poner en fila todos los números reales decimales entre 0 y 1.

Si supusiéramos que tenemos una lista completa infinita:

$$r_1 = 0,\mathbf{1}2345\ldots$$

$$r_2 = 0,4\mathbf{8}912\ldots$$

$$r_3 = 0,73\mathbf{5}60\ldots$$

$$r_4 = 0,014\mathbf{9}3\ldots$$

Podemos fabricar un número nuevo $X = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$ cambiando cada dígito de la **diagonal principal**:

- Si el dígito es 1, ponemos 2; en cualquier otro caso ponemos 1:

$$X = 0{,}2111\ldots$$

- Este nuevo número X difiere del primero en el 1.er decimal, del segundo en el 2.º decimal, del tercero en el 3.º, y así hasta el infinito.
- **Conclusión:** X no estaba en la lista original. Por tanto, **los números reales forman un infinito estrictamente mayor que los naturales**.

🖍️ EJERCICIOS RESUELTOS PASO A PASO (CON INCISOS EXPLICATIVOS)

Ejercicio Resuelto 50.1

Construye una función biyectiva explícita $f(n)$ que demuestre que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ tiene exactamente la misma cardinalidad que el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$.

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Organizar el emparejamiento alternando positivos y negativos:**
  - Al 1 le asignamos el 0.
  - A los números pares de $\mathbb{N}$ les asignamos los enteros positivos $(1,2,3\ldots)$.
  - A los números impares de $\mathbb{N}$ les asignamos los enteros negativos $(-1,-2,-3\ldots)$.
- **Paso 2: Escribir la fórmula matemática por ramas:**

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- **Paso 3: Comprobar los primeros términos:**
  - $n = 1$ (impar): $f(1) = -\frac{1-1}{2} = 0$
  - $n = 2$ (par): $f(2) = \frac{2}{2} = +1$
  - $n = 3$ (impar): $f(3) = -\frac{3-1}{2} = -1$

- $n = 4$ (par): $f(4) = \frac{4}{2} = +2$
- $n = 5$ (impar): $f(5) = -\frac{5-1}{2} = -2$

💡 **Inciso pedagógico (Sentido de la biyección):** Cada entero posible tiene asignado un número natural único y no queda ningún hueco sin cubrir. Por tanto, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

- **Resultado final: La función $f(n)$ establece una correspondencia uno a uno perfecta, demostrando que ambos conjuntos tienen cardinal $\aleph_0$.**

Ejercicio Resuelto 50.2

En el Gran Hotel de Hilbert, supongamos que llegan 3 autobuses y cada uno transporta infinitos pasajeros numerados (B_1, B_2, B_3). Si el hotel ya estaba lleno con sus infinitos huéspedes originales, ¿cómo podemos redistribuir las habitaciones para alojar a todos?

Desarrollo íntegro paso a paso:

- **Paso 1: Identificar el número total de grupos infinitos:**
  - Grupo 0: Los infinitos huéspedes actuales del hotel.
  - Grupos 1, 2 y 3: Los infinitos pasajeros de cada uno de los 3 autobuses.
  - Total: 4 **grupos infinitos de personas**.
- **Paso 2: Repartir el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ en 4 secuencias según el resto módulo 4:**
  - A los huéspedes actuales que estaban en la habitación n, los movemos a la habitación:

$$\text{Habitación } = 4n - 3 \quad (1,5,9,13,17 \dots)$$

  - A los pasajeros del Autobús 1 (pasajero k) los alojamos en:

$$\text{Habitación } = 4k - 2 \quad (2,6,10,14,18 \dots)$$

  - A los pasajeros del Autobús 2 (pasajero k) los alojamos en:

$$\text{Habitación } = 4k - 1 \quad (3,7,11,15,19 \dots)$$

  - A los pasajeros del Autobús 3 (pasajero k) los alojamos en:

$$\text{Habitación } = 4k \quad (4,8,12,16,20 \dots)$$

- **Paso 3: Conclusión:**
    - Todas las habitaciones quedan ocupadas sin solapamientos y todos los nuevos huéspedes tienen su propia habitación asignada.
- **Resultado final: Se asignan las habitaciones mediante las sucesiones aritméticas de paso 4 ($4n-3, 4k-2, 4k-1, 4k$).**

🎯 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **Propuesto 50.1:** Clasifica los siguientes conjuntos como *Infinito Numerable* ($\aleph_0$) o *Infinito No Numerable* ($\mathfrak{c}$):
    - a) El conjunto de todos los múltiplos de 10 ($\{10, 20, 30, \dots\}$).
    - b) El conjunto de todos los números reales entre 0 y 1 ($[0,1]$).

(Solución indicada: a) Numerable $\aleph_0$; b) No numerable $\mathfrak{c}$)

2. **Propuesto 50.2:** En el Hotel de Hilbert, si se van los primeros 5 huéspedes de las habitaciones $1, 2, 3, 4, 5$, ¿cómo movemos al resto para que no queden habitaciones vacías intermedias?

(Solución indicada: El huésped de la habitación n se mueve a la habitación $n-5$)

3. **Propuesto 50.3:** Según el Teorema de Cantor, para cualquier conjunto A, el conjunto de todas sus partes $\mathcal{P}(A)$ tiene un cardinal estrictamente mayor ($|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} > |A|$). Si aplicamos esto repetidamente a partir de $\aleph_0$, ¿cuántos tamaños de infinitos distintos existen en las matemáticas?

(Solución indicada: Existen infinitos tamaños de infinitos distintos, formando una jerarquía infinita: $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$)

📖 SOLUCIONARIO DETALLADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

Solución del Propuesto 50.1

- **Enunciado:** Clasificar los múltiplos de 10 y el intervalo real $[0,1]$.
- **Desarrollo:**
    1. *Múltiplos de 10:* Se pueden emparejar directamente con $\mathbb{N}$ mediante $f(n) = 10n$ ($1 \leftrightarrow 10, 2 \leftrightarrow 20 \dots$). Su cardinal es $\aleph_0$.

2. *Intervalo* $[0,1]$*:* Por el argumento diagonal de Cantor, contiene una cantidad no numerable de números reales continuos. Su cardinal es el del continuo $\mathfrak{c}$.

- **Resultado: a) Numerable ($\aleph_0$); b) No numerable ($\mathfrak{c}$)**

Solución del Propuesto 50.2

- **Enunciado:** Compactar el Hotel de Hilbert tras la marcha de las habitaciones 1 a 5.
- **Desarrollo:**
    1. Las habitaciones del 6 en adelante siguen ocupadas.
    2. Trasladamos a cada huésped de la habitación n ($n \geq 6$) a la habitación $n-5$.
    3. El de la habitación 6 pasa a la 1, el de la 7 a la 2, y así sucesivamente, rellenando el hotel por completo.
- **Resultado: Mover al huésped de la habitación n a la habitación $n-5$**

Solución del Propuesto 50.3

- **Enunciado:** Jerarquía de conjuntos de partes sucesivos.
- **Desarrollo:**
    1. El Teorema de Cantor establece que $|A| < |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ para todo conjunto.
    2. Al iterar el operador de partes: $\aleph_0 < \mathcal{P}(\aleph_0) < \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\aleph_0)\big) < \cdots$
    3. Cada paso crea un infinito estrictamente mayor que el anterior sin límite superior.
- **Resultado: Existen infinitos órdenes o niveles de infinito distintos ($\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$).**

Como colofón y fin de fiesta, te dejo un gran exámen final integrador de los 50 temas. Evidentemente, tu responde sólo a aquellas que sí hayas estudiado.

🎓 GRAN EXAMEN FINAL INTEGRADOR DE MATEMÁTICAS (50 TEMAS)

Este examen recopilatorio evalúa los conceptos y destrezas clave de los 7grandes bloques desarrollados a lo largo del curso.

📝 ENUNCIADOS DE LAS PREGUNTAS

BLOQUE I: Aritmética y Números

- **Pregunta 1 (Temas 2, 4 y 5):**

Calcula el valor exacto simplificado de la siguiente operación combinada:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}-\sqrt{\frac{49}{16}}$$

- **Pregunta 2 (Temas 3 y 7):**

Tres alarmas se programan para sonar cada 12, 18y 30 minutos, respectivamente. Si suenan juntas a las $08{:}00$, ¿a qué hora volverán a coincidir por primera vez? Si un artículo que costaba 180 eurotiene un descuento del 15%y luego se le aplica un impuesto del 21%, ¿cuál es su precio final?

BLOQUE II: Álgebra y Ecuaciones

- **Pregunta 3 (Temas 9, 12 y 13):**

Resuelve el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$$

- **Pregunta 4 (Temas 10 y 14):**

Resuelve la inecuación cuadrática y expresa el conjunto solución en forma de intervalo:

$$x^2-5x+6\leq 0$$

BLOQUE III: Funciones y Cálculo

- **Pregunta 5 (Temas 18, 19 y 20):**

Calcula el límite indeterminado $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$$

- **Pregunta 6 (Temas 21 y 22):**

Halla las dimensiones de un terreno rectangular de perímetro fijo 40 metrospara que su área encerrada sea máxima.

- **Pregunta 7 (Temas 23 y 24):**

Calcula el área del recinto plano delimitado por la parábola $y = 4 - x^2$y el eje horizontal $X(y = 0)$.

BLOQUE IV: Geometría Analítica y Espacio 3D

- **Pregunta 8 (Temas 43, 44 y 45):**

Dados el punto $P(1,2,3)$y el plano $\pi: 2x - y + 2z - 1 = 0$:

  - a) Halla la ecuación paramétrica de la recta perpendicular a πque pasa por P.
  - b) Calcula la distancia del punto Pal plano π.

- **Pregunta 9 (Temas 46 y 48):**

Calcula el volumen del tetraedro delimitado por el origen $(0,0,0)$y los vectores $\vec{u} = (2,0,0)$, $\vec{v} = (0,3,0)$y $\vec{w} = (1,1,4)$. Determina además los focos y la excentricidad de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

BLOQUE V: Probabilidad y Estadística

- **Pregunta 10 (Temas 27 y 28):**

En una clase de 12estudiantes (7 chicas y 5chicos), se elige al azar un comité de 3personas. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté formado exactamente por 2chicas y 1chico?

- **Pregunta 11 (Temas 29 y 38):**

Los resultados de un test siguen una distribución normal $N(\mu = 500, \sigma = 50)$. ¿Qué porcentaje de participantes obtiene una puntuación superior a 600puntos?

BLOQUE VI: Matemáticas Aplicadas y Computación

- **Pregunta 12 (Temas 30 y 31):**

Invertimos 10.000 euroal 5%de interés compuesto anual durante 2 años. ¿Cuál es el capital final? A continuación, calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

- **Pregunta 13 (Temas 32, 33 y 36):**

En un grafo conexo con 5vértices cuyos grados son $2,2,4,4,2$, ¿es posible trazar un camino cerrado que recorra cada arista exactamente

una vez sin levantar el lápiz? Justifica tu respuesta con el Teorema de Euler.

BLOQUE VII: Fronteras Matemáticas y Abstracción

- **Pregunta 14 (Temas 39 y 40):**

Dado el número complejo en forma binómica $z = 1 + \sqrt{3}i$:

  - a) Pásalo a forma polar (r_α).
  - b) Calcula z^6utilizando la fórmula de De Moivre.

- **Pregunta 15 (Temas 41 y 50):**

Resuelve la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = 3y$con la condición inicial $y(0) = 5$. Explica brevemente por qué el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$es estrictamente mayor que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$según Cantor.

📖 **SOLUCIONARIO DETALLADO PASO A PASO**

Solución a la Pregunta 1

- **Operación combinada:**
  1. Paréntesis inicial: $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.
  2. Exponente negativo: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$.
  3. Multiplicación: $\frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{8}$.
  4. Raíz cuadrada: $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$.
  5. Resta final: $\frac{25}{8} - \frac{14}{8} = \frac{11}{8}$.
- **Resultado:** $\frac{11}{8}$**(o** $1{,}375$**)**

Solución a la Pregunta 2

- **Mínimo Común Múltiplo:**
  - $12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
  - m.c.m.$(12,18,30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$ minutos $=$ 3 horas.
  - Vuelven a coincidir a las $08{:}00 + 3$ h $= 11{:}00$ h.
- **Porcentajes encadenados:**
  - Descuento del $15\% \Longrightarrow$ Factor $0{,}85$.

- Impuesto del $21\% \Longrightarrow$ Factor $1{,}21$.
- Precio final $= 180 \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}21 = 153 \cdot 1{,}21 = 185{,}13$ euro.

- **Resultado: Coinciden a las** $11{:}00$**; Precio final** $= 185{,}13$ euro

Solución a la Pregunta 3

- **Sistema no lineal:**
  1. Despejamos $x$de la primera ecuación: $x = y + 2$.
  2. Sustituimos en la segunda: $(y+2)^2 + y^2 = 10 \Longrightarrow y^2 + 4y + 4 + y^2 = 10$.
  3. Ecuación cuadrática en y: $2y^2 + 4y - 6 = 0 \Longrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0$.
  4. Factorizamos: $(y+3)(y-1) = 0 \Longrightarrow y_1 = 1, \quad y_2 = -3$.
  5. Hallamos las $x$correspondientes:
     - Si $y = 1 \Longrightarrow x = 1 + 2 = 3$.
     - Si $y = -3 \Longrightarrow x = -3 + 2 = -1$.
- **Resultado: Dos soluciones:** $(3{,}1)$**y** $(-1, -3)$

Solución a la Pregunta 4

- **Inecuación cuadrática:**
  1. Raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$: $(x-2)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = 2, x = 3$.
  2. La parábola abre hacia arriba ($a = 1 > 0$), por lo que toma valores negativos o nulos (≤ 0) entre sus dos raíces.
- **Resultado: Intervalo cerrado** $[2{,}3]$

Solución a la Pregunta 5

- **Límite indeterminado:**
  1. Factorizamos numerador y denominador:
     - $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$
     - $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$
  2. Cancelamos la indeterminación $(x-3)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{3+3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

- **Resultado:** $\frac{3}{2}$

Solución a la Pregunta 6

- **Optimización geométrica:**
  1. Perímetro: $2x + 2y = 40 \Longrightarrow x + y = 20 \Longrightarrow y = 20 - x$.
  2. Función Área a maximizar: $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.
  3. Derivamos e igualamos a cero: $A'(x) = 20 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 20 \Longrightarrow x = 10$ m.
  4. Dimensión restante: $y = 20 - 10 = 10$ m. (Comprobación: $A''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow$ Máximo).
- **Resultado: Un cuadrado de** 10 m $\times 10$ m**(Área máxima** $=$ 100 m^2**)**

Solución a la Pregunta 7

- **Integral definida:**
  1. Puntos de corte con el eje X: $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = -2, x = 2$.
  2. Planteamiento de la integral:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

  3. Evaluación:

$$\left(4(2) - \frac{8}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{-8}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

- **Resultado:** $\frac{32}{3}$ u$^2 \approx 10{,}67$ u^2

Solución a la Pregunta 8

- **Geometría espacial:**
  - a) El vector normal de πes $\vec{n} = (2, -1, 2)$. La recta perpendicular por $P(1,2,3)$es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

  - b) Distancia de Pa π:

$$d(P,\pi)=\frac{|2(1)-1(2)+2(3)-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|2-2+6-1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{5}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$$

- **Resultado: a)** $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$ **; b)** $d=\frac{5}{3}$ u

Solución a la Pregunta 9

- **Volumen del tetraedro:**
  1. Producto mixto:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(3\cdot 4-0)=24$$

  2. Volumen: $V=\frac{1}{6}|24|=4$ u^3.
- **Elipse:**
  - $a^2=100\Longrightarrow a=10;\ b^2=64\Longrightarrow b=8.$
  - $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6.$
  - Focos: $F(\pm 6{,}0)$; Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{6}{10}=0{,}6.$
- **Resultado: Volumen** $=4$ u^3**; Focos en** $(\pm 6{,}0)$**,** $e=0{,}6$

Solución a la Pregunta 10

- **Combinatoria y probabilidad:**
  1. Casos totales posibles (elegir 3personas de 12):

$$C_{12}^3=\binom{12}{3}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$$

  2. Casos favorables (2 chicas de 7Y 1chico de 5):

$$C_7^2\cdot C_5^1=\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{1}=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 5=21\cdot 5=105$$

  3. Regla de Laplace: $P=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}\approx 0{,}4773\ (47{,}73\%).$
- **Resultado:** $P=\frac{21}{44}\approx 47{,}73\%$

Solución a la Pregunta 11

- **Distribución Normal:**
  1. Tipificamos $X=600$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{600 - 500}{50} = \frac{100}{50} = +2$$

2. A $+2\sigma$de la media, el intervalo central $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$abarca el $95{,}44\%$de los datos.
3. En la cola superior queda: $\frac{100\% - 95{,}44\%}{2} = 2{,}28\%$.

- **Resultado:** $2{,}28\%$**de los participantes**

Solución a la Pregunta 12

- **Interés compuesto:**

$C_f = C_0(1 + r)^t = 10.000 \cdot (1 + 0{,}05)^2 = 10.000 \cdot 1{,}1025 = 11.025$ euro

- **Determinante de matriz:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4) - (-2 \cdot 5) = 12 - (-10) = 12 + 10 = 22$$

- **Resultado:** $C_f = 11.025$ euro**; Determinante** $|A| = 22$

Solución a la Pregunta 13

- **Teorema de Euler para grafos:**
  - La lista de grados de los 5vértices es $\{2,2,4,4,2\}$.
  - Todos los vértices tienen **grado par** (hay 0vértices impares).
  - Por el Teorema de Euler, **SÍ es posible** recorrer todas las aristas sin levantar el lápiz y terminar en el mismo vértice de inicio (posee un **circuito euleriano cerrado**).
- **Resultado: Sí es posible (todos los vértices son pares** $\Rightarrow$**circuito euleriano).**

Solución a la Pregunta 14

- **Forma polar y fórmula de De Moivre:**
  - a) $a = 1, b = \sqrt{3}$:
    - Módulo: $r = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$.
    - Argumento: $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \alpha = 60°$.
    - Forma polar: $z = 2_{60°}$.

- b) Elevamos a la 6potencia:

$$z^6 = (2^6)_{6\cdot 60^\circ} = 64_{360^\circ} = 64_{0^\circ} = 64(\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ) = 64(1+0) = 64$$

- **Resultado: a)** $z = 2_{60^\circ}$**; b)** $z^6 = 64$

Solución a la Pregunta 15

- **Ecuación diferencial separable:**
  1. $\frac{dy}{y} = 3\,dt \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3\ dt \Longrightarrow \ln(y) = 3t + C.$
  2. $y(t) = Ke^{3t}$. Con $y(0) = 5 \Longrightarrow K = 5 \Longrightarrow y(t) = 5e^{3t}.$
- **El infinito de Cantor:**
  - $\mathbb{N}$tiene cardinal numerable $\aleph_0$(se pueden listar en fila 1,2,3 …).
  - Mediante el **argumento diagonal de Cantor**, se demostró que cualquier lista de números reales decimales en el intervalo $[0,1]$siempre omite números reales fabricados alterando la diagonal. Por tanto, $\mathbb{R}$es un infinito **no numerable** de orden superior ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$).
- **Resultado:** $y(t) = 5e^{3t}$**;** $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > |\mathbb{N}| = \aleph_0$**(por el argumento diagonal).**

ANEXO: LAS MATEMÁTICAS MÍNIMAS QUE TODA PERSONA DEBE CONOCER Y MANEJAR CON SOLTURA EN LA VIDA.

LAS DOCE PRUEBAS DE «ALBERTÍX»

Permítaseme esta pequeña broma blanca, desde el respeto más profundo hacia el profesor **Don Miquel Albertí Palmer**.

Esta sección está pensada para quien simplemente pretenda repasar sus competencias básicas en matemáticas y comprobar su soltura con los contenidos esenciales propuestos por el insigne catedrático.

Competencia matemática vital: más actitud que contenido[7]

Vamos a suponer que soy una persona normalita, y que no tengo ninguna profesión técnica que me exija tener un nivel alto de Matemáticas, es decir, que no preciso, por ejemplo, conocer el Análisis Matemático como la palma de mi mano.

¿Cuántas Matemáticas preciso saber en mi vida cotidiana?

A esta importante pregunta ha respondido, con la brillantez intelectual a que nos tiene habituados, el gran divulgador matemático Don Miquel Albertí Palmer, profesor del Máster Interuniversitario de Didáctica de las Matemáticas en Barcelona y catedrático de Matemáticas en el INS Vallés de Sabadell. Su respuesta es la que sigue:

«En cuanto a los contenidos, una persona se desenvolverá cómodamente en la vida cotidiana si es capaz de:

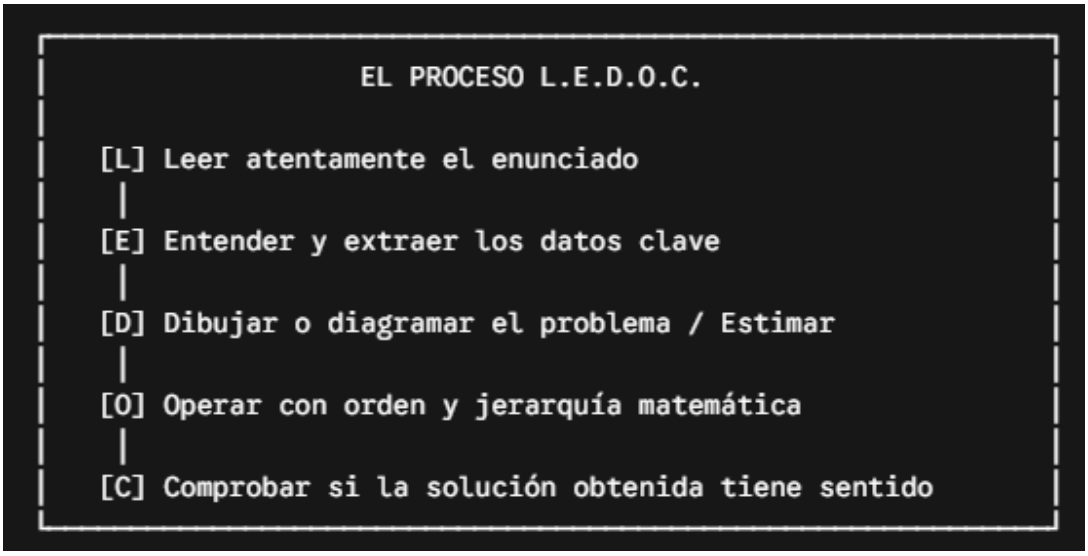
1. *Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos.*
2. *Usar la calculadora a nivel elemental.*
3. *Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje).*
4. *Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro).*
5. *Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas.*
6. *Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente, ya sean de origen algebraico (lineales, cuadráticas) o experimental (edad-estatura, masa-importe…).*
7. *Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales: segmento, recta, cónicas, cuadriláteros, triángulos, polígonos, poliedros y cuerpos circulares.*
8. *Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos.*

[7] Miquel Albertí Palmer. Las Matemáticas de la vida cotidiana (2018).

9. *Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras geométricas y expresiones algebraicas sencillas.*
10. *Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría.*
11. *Usar decimales, fracciones y porcentajes para medir la incertidumbre.*
12. *Contar y determinar las características de una población (moda, mediana y media aritmética).»*

1) Calcular con y sin calculadora y realizar estimaciones razonadas de cálculos

- **Temas de referencia:** *Las 4 reglas, Números naturales y El proceso L.E.D.O.C.*



📝 **Ejercicio Resuelto: Estimación razonada frente a cálculo exacto**

Enunciado: Vas a comprar 4artículos que cuestan $19{,}85$ euro, $9{,}15$ euro, $4{,}90$ euroy $29{,}95$ euro.

a) Realiza una estimación rápida redondeando a las unidades para saber si te alcanza con un billete de 70 euro.

b) Calcula el coste exacto a mano.

- **Solución paso a paso:**
    1. **Estimación rápida:** Redondeamos cada cifra a la unidad más cercana:

$$20 \text{ euro} + 9 \text{ euro} + 5 \text{ euro} + 30 \text{ euro} = 64 \text{ euro}$$

Conclusión: Sí alcanza, y sobrarán unos 6 euroaproximadamente.

2. **Cálculo exacto a mano:**

$$\begin{array}{r} 19{,}85 \\ 9{,}15 \\ 4{,}90 \\ +\ 29{,}95 \\ \hline \mathbf{63{,}85}\ \text{euro} \end{array}$$

3. **Devolución:** $70 - 63{,}85 = \mathbf{6{,}15}$ euro.

4.

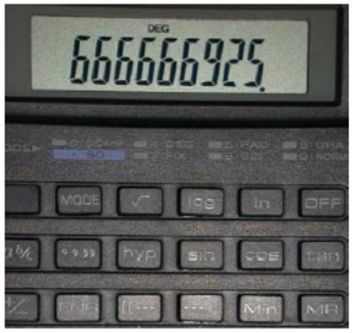
2) Usar la calculadora a nivel elemental

Existen dos clases de calculadoras: la **elemental** (izquierda) y la **científica** (derecha).

Sólo recordar para quienes no suelan usarla que, en la calculadora elemental, primero se introduce el número y luego la operación. Así la raíz cuadrada de 25 sería: 2 5 √

En la científica, va al revés, primero la función y después la cantidad. √ 2 5

Divisiones con calculadora



Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

325 ÷ 5 = 65

Pero si hacemos:

325 ÷ 15 = 21.666666667

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: 325 – (15 · 21) = 10.

📝 Ejercicio Resuelto: Jerarquía de operaciones en calculadora

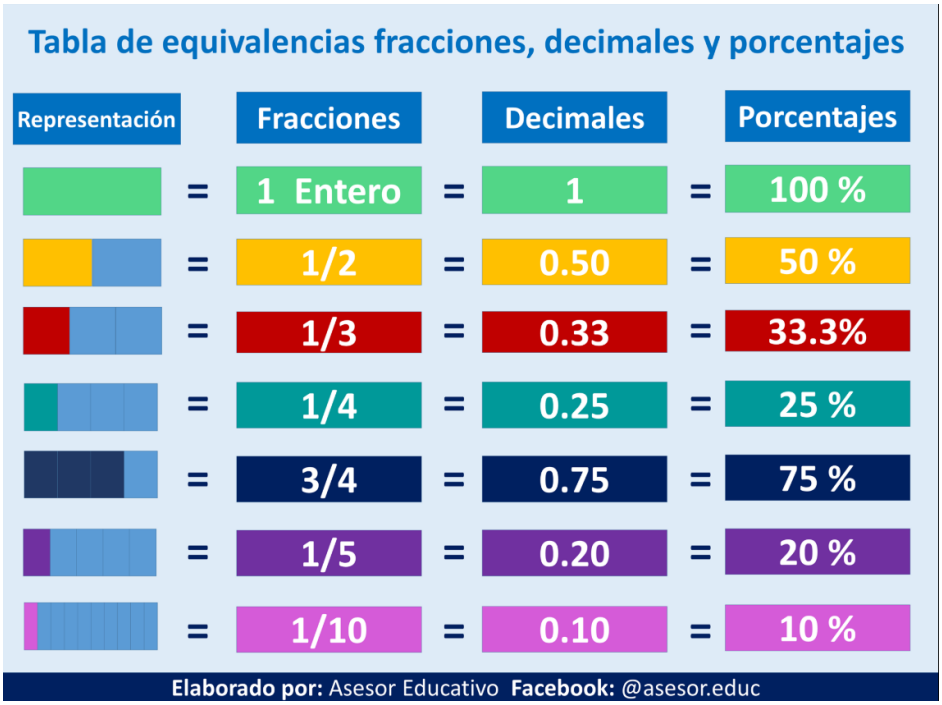
Enunciado: Deseas calcular la siguiente operación combinada: $\frac{3\times15-5}{2}$.

a) ¿Cómo se introduce paso a paso en la calculadora elemental?

b) ¿Cómo se introduce en la científica?

- **Solución paso a paso:**
  1. **En la elemental:** Se debe calcular el numerador paso a paso porque no tiene memoria de jerarquía completa:
     - Pulsar 3 × 15 = (muestra 45).
     - Pulsar - 5 = (muestra 40).
     - Pulsar ÷ 2 = →**Resultado:** 20.
  2. **En la científica:** Se escriben los paréntesis directamente:
     - Pulsar (3 × 15 - 5) ÷ 2 [=] →**Resultado:** 20.

3) Usar con comodidad expresiones numéricas equivalentes (decimal, fracción, porcentaje)



De este modo:

$$\frac{1}{4} = 25\% = 0{,}25$$

📝 Ejercicio Resuelto: Aplicación de formas equivalentes

Enunciado: Una tienda ofrece un descuento del 20%en un abrigo que cuesta 80 euro.

a) Expresa el 20%como fracción simplificada y como número decimal.

b) Calcula cuánto dinero descuentan utilizando las tres formas numéricas.

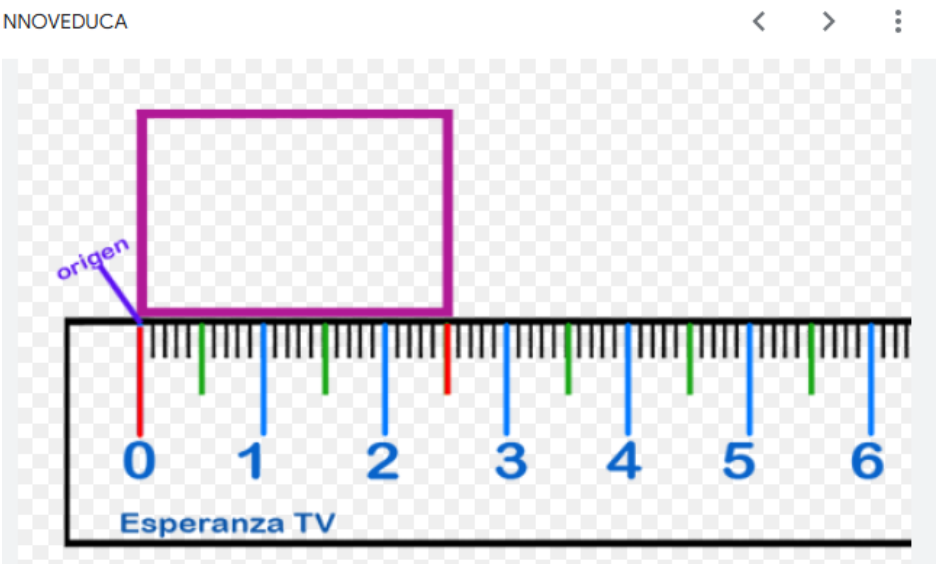
- **Solución paso a paso:**
    1. **Formas equivalentes:**

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

    2. **Cálculo del descuento:**
        - Con porcentaje: $\frac{20\times 80}{100} = 16$ euro
        - Con fracción: $\frac{1}{5} \times 80 = \frac{80}{5} = 16$ euro
        - Con decimal: $80 \times 0{,}20 = 16$ euro
    - **Precio rebajado:** $80 - 16 = \mathbf{64}$ euro.

4) Usar correctamente instrumentos de medida (regla, balanza, reloj, termómetro)

Su funcionamiento es bastante intuitivo y no requiere de mayor explicación. Sólo recordar la regla de lectura en la escala de milímetros y centímetros:



📝 Ejercicio Resuelto: Medición y reloj

Enunciado: Un examen comienza a las $09:45$ hy tiene una duración estipulada de 1 hora y 50 minutos.

a) ¿A qué hora exacta finaliza?

b) Expresa la duración en minutos totales y en formato decimal de horas.

- **Solución paso a paso:**
  1. **Hora de fin:**
     - Sumamos 1 h: $09:45 + 1$ h $= 10:45$ h.
     - Sumamos 50 min: $10:45 + 15$ min $= 11:00$ h; quedan 35 min $\rightarrow \mathbf{11:35}$ h.
  2. **Conversión de unidades:**
     - En minutos: 1 h $\times 60 + 50$ min $= \mathbf{110}$ minutos.
     - En formato decimal: 1 h $+ \frac{50}{60}$ h $= 1 + 0{,}833 = \mathbf{1{,}833}$ horas.

5) Identificar y crear patrones de formación de sucesiones figurativas y numéricas

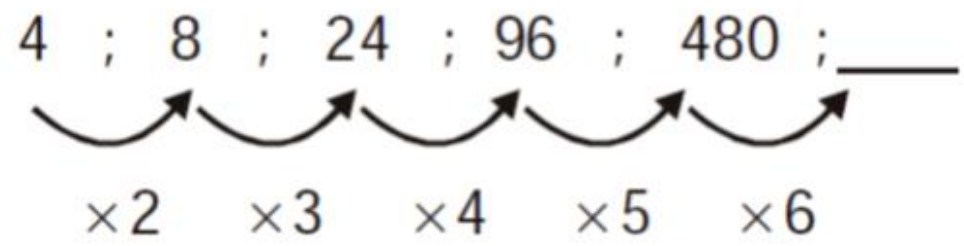
Las sucesiones son importantes porque suelen aparecer en todas las pruebas de razonamiento lógico y matemático, tanto en oposiciones como en pruebas de selección para puestos de trabajo (por ejemplo, Correos de España, Mozo de Almacén, etc.). Son el tipo de pregunta más habitual que nos encontraremos en los test psicotécnicos.

¿Qué es una sucesión?

Es un conjunto ordenado de elementos que pueden ser números, letras o figuras o una combinación de las anteriores. Estos elementos se caracterizan por seguir una regla de formación.

¿Qué son sucesiones numéricas?

Son conjuntos numéricos cuyos términos obedecen a una ley de formación que nos permite determinar el término que continúa.



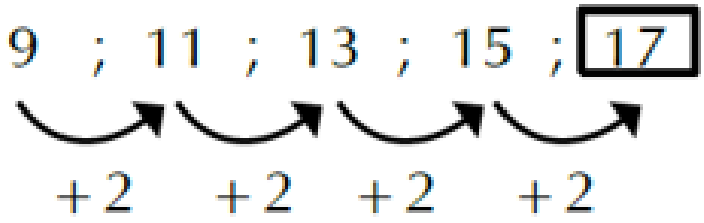
Ley de formación: Comparando un término con el anterior, se observa que la regla es $\times 2, \times 3, \times 4, \times 5$.

- **Respuesta:** $480 \times 6 = \mathbf{2880}$.

Tipos de sucesiones numéricas:

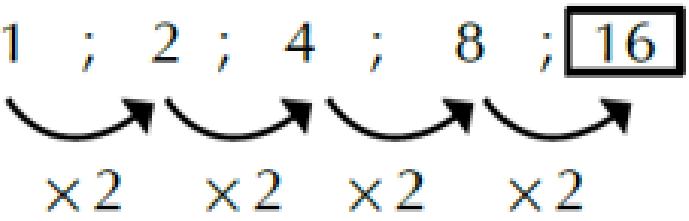
- **1. Sucesiones numéricas aritméticas:** La ley de formación es una suma o una resta.

Ejemplo:



Sucesiones numéricas geométricas
Son aquellas en donde la ley de formación, la podemos encontrar mediante una multiplicación o división de dos cantidades.

Ejemplo:



- ,

Términos: 5 9 13 17 21 [25]

| | | | | ▲

Patrón: └── +4 ──┘── +4 ──┘── +4 ──┘── +4 ──┘── +4 ──┘── +4 ──┘

- **2. Sucesiones numéricas geométricas:** La ley de formación se encuentra mediante una multiplicación o división.

Términos: 3 6 12 24 48 [96]

| | | | | ▲

Patrón: └── ×2 ──┘── ×2 ──┘── ×2 ──┘── ×2 ──┘── ×2 ──┘── ×2 ──┘

- **3. Sucesiones numéricas combinadas:** Intervienen operaciones mezcladas.

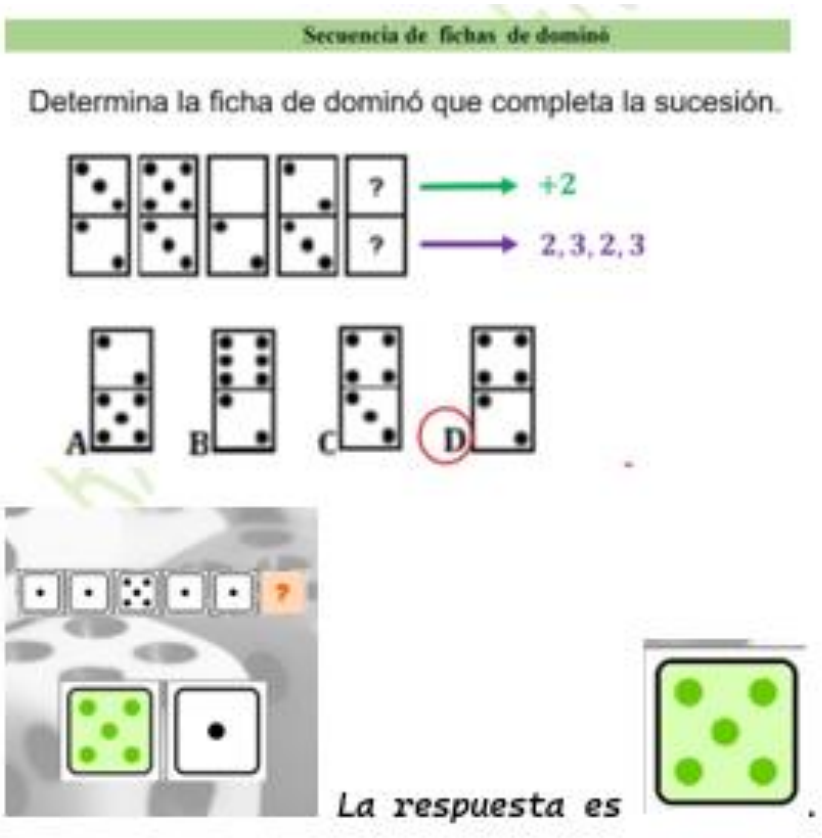
Términos: 2 4 7 14 17 [34]

| | | | | ▲

Patrón: └── ×2 ──┘── +3 ──┘── ×2 ──┘── +3 ──┘── ×2 ──┘── +3 ──┘

Sucesiones figurativas (Fichas de dominó y dados):

Por lo que al aspecto que pueden tener, puede ir desde lo más formal hasta ir «disfrazadas» de fichas de dominó, dados o figuras geométricas.



Análisis de la serie:

- Parte superior: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 3$ …o ciclos modulares del dominó (0 a 6).
- En la serie de la ficha incógnita, el valor resultante es **la ficha** $[0/6]$**(Blanca / Seis)**.

6) Establecer relaciones de cambio entre variables y representarlas gráficamente

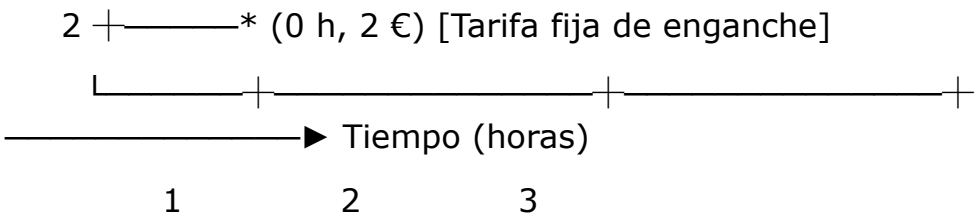
Importe (€)

▲

11 + * (3 h, 11 €)

8 + * (2 h, 8 €)

5 + * (1 h, 5 €)



📝 **Ejercicio Resuelto: Relación Lineal**

Enunciado: Un fontanero cobra una tarifa fija de desplazamiento de 20 euromás 30 euro**por cada hora** de trabajo (x).

a) Escribe la ecuación que relaciona el coste $y$con las horas trabajadas x.

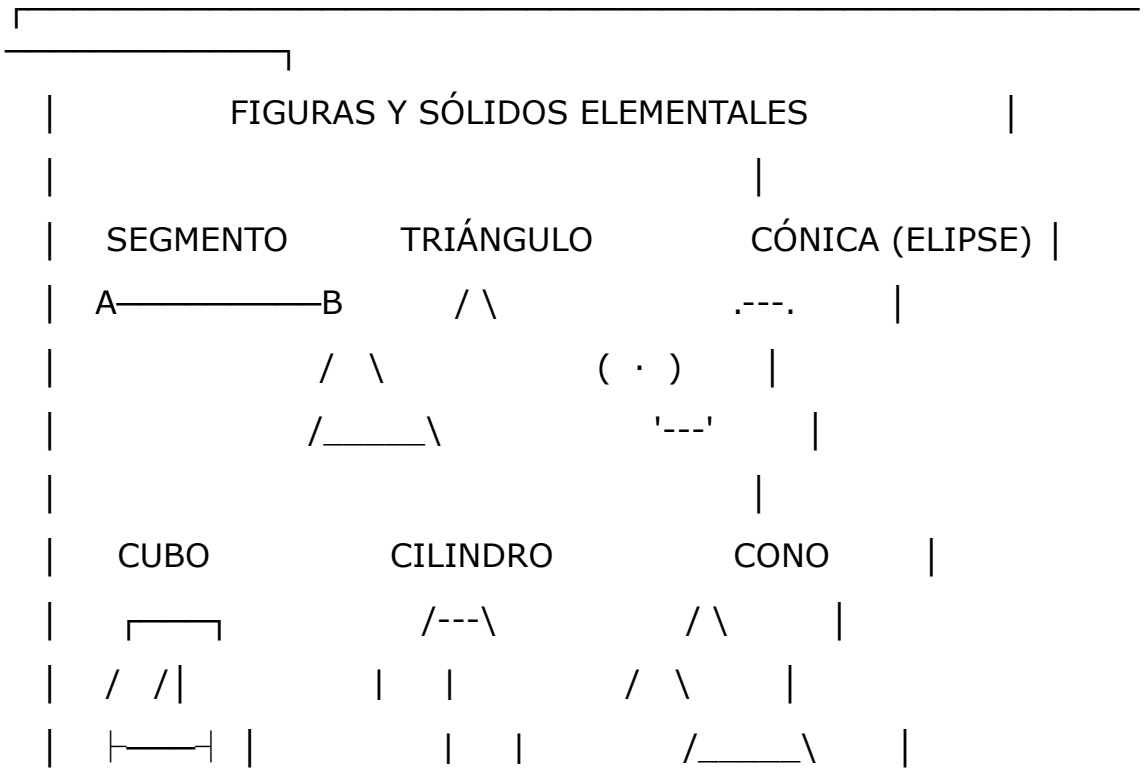
b) ¿Cuánto costará una reparación de 3 horas y media($x = 3{,}5$)?

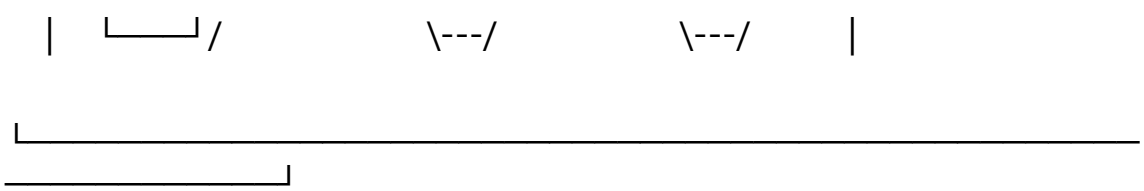
- **Solución paso a paso:**
  1. **Ecuación lineal:** $y = 30x + 20$
  2. **Cálculo para 3,5 horas:**

$$y = 30(3{,}5) + 20 = 105 + 20 = \mathbf{125} \text{ euro}$$

7) Distinguir y nombrar correctamente curvas, figuras y sólidos elementales

- **Tema de referencia:** *Páginas 193 a 197.*





📝 Ejercicio Resuelto: Identificación geométrica

Enunciado: Nombra la figura que cumple cada propiedad:

a) Polígono regular de 6lados y 6vértices.

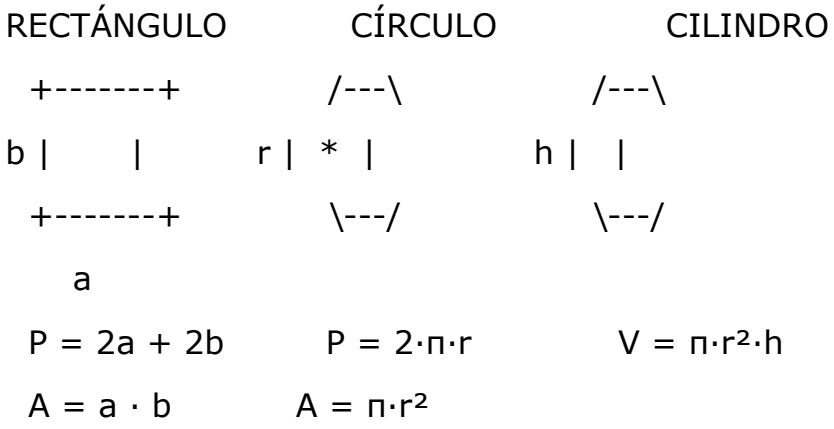
b) Sólido geométrico con una base circular y un único vértice o cúspide.

c) Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un centro fijo en el plano.

- **Solución:**
  - a) **Hexágono regular**.
  - b) **Cono recto**.
  - c) **Circunferencia**.

8) Calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y sólidos sencillos

- **Tema de referencia:** *Páginas 173 a 182, y 196 a 197.*



📝 Ejercicio Resuelto: Cálculo de área y volumen

Enunciado: Un depósito cilíndrico tiene un radio en la base de 3 metrosy una altura de 5 metros(usa $\pi \approx 3{,}14$).

a) Calcula el área de la base circular.

b) Calcula el volumen total del depósito en m^3y en litros ($1\ m^3 = 1000$ L).

- **Solución paso a paso:**

1. **Área de la base:**

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 3{,}14 \cdot 9 = \mathbf{28{,}26}\ \text{m}^2$$

2. **Volumen:**

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = 28{,}26 \cdot 5 = \mathbf{141{,}3}\ \text{m}^3$$

3. **Capacidad en litros:**

$$141{,}3\ \text{m}^3 \times 1000 = \mathbf{141.300}\ \text{litros}$$

9) Modelizar matemáticamente para visualizar situaciones con figuras y expresiones algebraicas

- **Tema de referencia:** *Páginas 284 a 319, 426 a 427 y Geometría Analítica de la Recta.*

ESQUEMA VISUAL DEL PROBLEMA:

```
        |\
        | \
        |  \  Escalera = 10 m
Pared = h|   \
        |    \
        |_____\
        Base = 6 m
```

📝 **Ejercicio Resuelto: Aplicación del Teorema de Pitágoras**

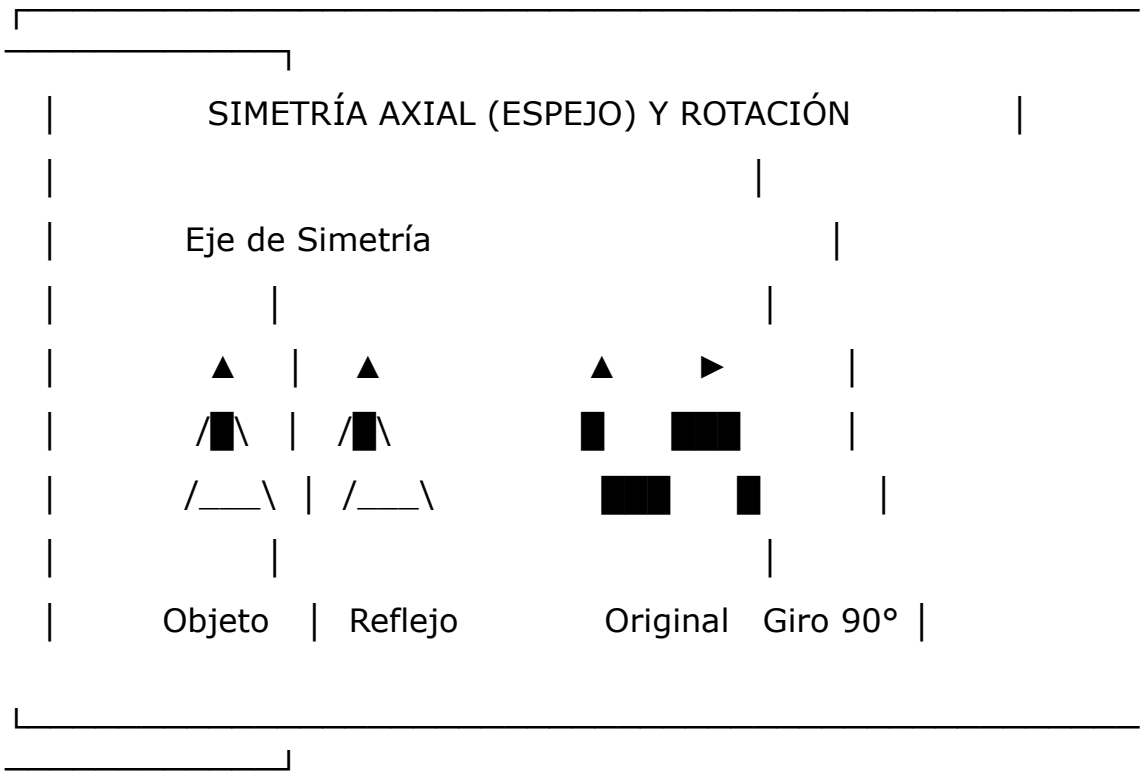
Enunciado: Una escalera de 10 metrosse apoya contra una pared vertical con la base separada a 6 metrosde la pared. ¿Qué altura alcanza en la fachada?

- **Solución paso a paso:**

1. Identificamos el triángulo rectángulo: cateto base $a = 6$ m, hipotenusa $c = 10$ m, altura h.
2. Ecuación: $h^2 + 6^2 = 10^2 \Longrightarrow h^2 + 36 = 100$.
3. Despejamos: $h^2 = 100 - 36 = 64 \Longrightarrow h = \sqrt{64} = \mathbf{8}$ metros.

10) Relacionar y distinguir figuras por su forma y orientación espacial o simetría

- **Tema de referencia:** *Páginas 196 y 197.*



📝 Ejercicio Resuelto: Coordenadas simétricas

Enunciado: En los ejes cartesianos tenemos el punto $P(4,5)$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas de su simétrico P'respecto al eje vertical Y?

b) ¿Cuáles son las de su simétrico P''respecto al origen de coordenadas $(0,0)$?

- **Solución:**
  - a) Respecto al eje Y, la coordenada $x$cambia de signo: $P'(\mathbf{-4},\mathbf{5})$.
  - b) Respecto al origen $(0,0)$, cambian ambos signos: $P''(\mathbf{-4},\mathbf{-5})$.

11) Usar fracciones, decimales y porcentajes para medir la incertidumbre

TRES FORMAS DE MEDIR LA PROBABILIDAD		
FRACCIÓN (Repartos visuales: como una tarta)	DECIMAL (Cálculo matemático)	PORCENTAJE (Dato de comunicación)
3 / 4 (3 partes de 4)	0,75	75%

El porqué de tener tres tipos de expresiones para medir la incertidumbre se basa en la complejidad y visualidad del dato que queremos exponer:

- Para repartir algo que vemos y tocamos, como una **tarta de nata y fresa**, es mejor recurrir a las **fracciones** ($\frac{3}{4}$).
- Si queremos dar un dato directo y no tenemos forma gráfica de mostrarlo, es más práctico y comunicativo hablar de un 75%que dar el decimal $0{,}75$o la fracción $\frac{3}{4}$.
- **Temas de referencia:** *Fracciones, Números decimales e irracionales y Aritmética de las proporciones.*

📝 **Ejercicio Resuelto: Cálculo de probabilidad**

Enunciado: En una urna hay 3**bolas rojas**, 2**bolas verdes** y 5**bolas amarillas** (10 bolas en total). Al sacar una bola al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde? Exprésala en fracción irreducible, decimal y porcentaje.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que **no** sea amarilla?

- **Solución paso a paso:**

1. **Probabilidad de bola verde:**
    - $P(\text{Verde}) = \frac{2}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,20} = \mathbf{20\%}$.
2. **Probabilidad de NO ser amarilla (rojas + verdes = 5):**
    - $P(\text{No Amarilla}) = \frac{5}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,50} = \mathbf{50\%}$.

12) Contar y determinar las características de una población (moda, mediana y media aritmética)

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS BÁSICOS
MEDIA ($\bar{x}$): Suma de todos los datos ÷ Número de datos
MODA (Mo): El valor que MÁS se repite (mayor frecuencia)
MEDIANA (Me): El valor que queda JUSTO EN EL MEDIO (tras ordenar todos los datos)

Muestra impar (5 datos): 1, 3, [5], 7, 9 ---> Me = 5

▲

Centro exacto

Muestra par (6 datos): 2, 4, [6, 8], 10, 12 ---> Me = (6+8)/2 = 7

└──┬──┘

Semisuma central

Con la **Mediana** existe una particularidad:

- Si la muestra tiene una **cantidad impar** de números, la mediana es el dato central exacto.
- Si la muestra fuese una **cantidad par**, tomaremos las dos cifras centrales y las dividiremos entre dos.

12) Contar y determinar las características de una población (moda y media aritmética).”

Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la **media** es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5,6. La **moda** es: 5. La **mediana** es 5
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad.	
Moda	El valor que más se repite.	

Con la Mediana existe una particularidad. En el ejemplo han puesto una muestra de 5 números, es decir una cantidad impar.

Si la muestra de números fuese una cantidad par, tomaremos las dos cifras centrales y las dividiremos entre dos.

📝 Ejercicio Resuelto: Mediana en muestra par

Enunciado: Se registran las horas de estudio semanales de 6alumnos:

$$6, \quad 2, \quad 8, \quad 4, \quad 10, \quad 6$$

Calcula la **media**, la **moda** y la **mediana**.

- **Solución paso a paso:**

1. **Media ($\bar{x}$):**

$$\bar{x} = \frac{6+2+8+4+10+6}{6} = \frac{36}{6} = \mathbf{6} \text{ horas}$$

2. **Moda (M_o):**

El número que más se repite es el 6(aparece dos veces).

3. **Mediana (M_e):**

Paso 1: Ordenamos los datos de menor a mayor:

$$2, \quad 4, \quad \mathbf{6}, \quad \mathbf{6}, \quad 8, \quad 10$$

Paso 2: Al ser una muestra par ($N = 6$), tomamos los dos términos centrales (posiciones $3.^{\underline{a}}$y $4.^{\underline{a}}$):

$$M_e = \frac{6+6}{2} = \mathbf{6}$$